

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Уральский государственный университет путей сообщения»  
(УрГУПС)

Вып. 10 (229)

# Математические методы и модели в прикладных исследованиях системных взаимосвязей

Сборник научных трудов

Екатеринбург  
УрГУПС  
2017

УДК 54-74  
М38

**Математические методы и модели в прикладных исследованиях**  
М38 **системных взаимосвязей** : сб. науч. тр. / [под научн. ред. Г. А. Тимофеевой, д-ра физ.-мат. наук, О. В. Куликовой, канд. пед. наук]. — Екатеринбург : УрГУПС, 2017. — Вып. 10(229). — 94, [2] с.

УДК 54-74

*Опубликовано по решению  
редакционно-издательского совета университета*

Качество иллюстраций соответствует качеству  
предоставленных оригиналов

Рецензенты:

Ю.И. Ялышев, д-р физ.-мат. наук (УрГУПС)

Н.В. Казанцева, д-р физ.-мат. наук (ИФМ УрО РАН)

© Уральский государственный университет  
путей сообщения (УрГУПС), 2017

# Содержание

---

<b>Раздел 1. Математическое моделирование физических и информационных процессов .....</b>	<b>4</b>
<i>Чуев Н. П., Горохова К. О.</i> Математическое моделирование динамики численности технических средств железнодорожного транспорта .....	4
<i>Бердников К. В., Стружанов В. В.</i> Общие положения теории разрушения механических систем .....	15
<i>Волкова Т. А.</i> Анализ влияния вида распределения случайного нагружения на параметры усталостной долговечности металлов.....	23
<i>Чуев Н. П.</i> Некоторые вопросы теории ньютоновского потенциала в задачах динамики самогравитирующего газа.....	31
<b>Раздел 2. Методический аспект преподавания в вузе математических дисциплин .....</b>	<b>39</b>
<i>Боярский М. Д., Гниломедов П. И.</i> Коррекция содержания курса математики в условиях оптимизации учебного процесса.....	39
<i>Башуров В. В., Башурова О. А., Борисова Н. О.</i> О некоторых особенностях и закономерностях математической олимпиады УрГУПС 2015 года .....	48
<i>Куликова О. В.</i> Применение программы «Поиск решения» в учебном процессе при нахождении альтернативного оптимума .....	55
<b>Раздел 3. Применение математических методов и моделей в учебных исследованиях студентов .....</b>	<b>63</b>
<i>Филиппов М. Ю.</i> Программная реализация генерации неприводимых бинарных многочленов .....	63
<i>Курмаева К. В., Шатохин Д. В.</i> Регрессионный анализ на примере установления взаимосвязи показателей обучения студентов технического вуза.....	67
<i>Таскин Р. И.</i> Проверка возможности определения свойств веса булевой функции по виду полинома Жегалкина .....	76
<i>Дюпин И. А., Зайцева Е. С., Башуров В. В.</i> О критерии Колмогорова согласования эмпирического и теоретического распределений.....	82

# Раздел 1

## Математическое моделирование физических и информационных процессов

---

УДК 51–74:629.4.058(65)

**Н.П. Чувев,**

канд. физ.-мат. наук, Уральский государственный университет путей сообщения

**К.О. Горохова,**

4 курс, Уральский государственный университет путей сообщения

### Математическое моделирование динамики численности технических средств железнодорожного транспорта

**Н**аиболее глубокие исследования, посвященные проблемам транспортных потоков, связаны с движением автомобилей. В середине 50-х гг. XX в. предложена гидродинамическая модель однополосного транспортного потока, в которой транспортный поток сравнивается с движением жидкости, впоследствии названная моделью Лайтхилла — Уизема — Ричардса. Создатели модели говорили о функциональной зависимости между потоком автомобилей и плотностью [1].

#### Построение математической дифференциальной модели

В данной работе рассмотрим случай трехмерного состояния технических средств, а именно, колесных пар (в частности, вагонов) для конкретного предприятия, оператора и т. д. Возьмем наиболее значимые показания технических средств: пробег  $s \in [0, S]$ , износ гребня

$r \in [0, R]$ , прокат поверхности катания колеса  $l \in [0, L]$ . Величины  $S$ ,  $R$  и  $L$  – предельные показатели указанных параметров при отправке объектов на капитальный ремонт или списание. Обозначим  $n(t, s, r, l)$ , где  $n$  – объемная плотность распределения технических средств в момент времени  $t$ . Тогда общая численность технических средств в момент времени  $t$

$$N(t) = \int_0^S \int_0^R \int_0^L n(t, s, r, l) ds dr dl. \quad (1)$$

Обозначим специально введенную область трехмерного пространства  $\Omega: \{0 \leq s \leq S; 0 \leq r \leq R; 0 \leq l \leq L\} \subset R^3$ .

Используя результаты вывода уравнения переноса для одномерного случая [2], запишем дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для трехмерного случая

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha_1 n + \beta_1 \varphi(t) + f(t)$$

или

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u \frac{\partial n}{\partial s} + v \frac{\partial n}{\partial r} + w \frac{\partial n}{\partial l} = -\alpha_1 n + \beta_1 \varphi(t) + f(t), \quad (2)$$

где  $u$  – средняя скорость пробега технических средств;  $v$  – средняя скорость износа гребня;  $w$  – средняя скорость износа поверхности катания колеса;  $\alpha_1, \beta_1$  – положительные числа;  $\varphi(t)$  – плотность среднестатистического возврата техники, после ремонта отнесенной к единице объема и к единице времени;  $f(t)$  – плотность поступающей новой техники, отнесенной к единице объема и единице времени.

Таким образом, функции  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  – это плотности источников. Для уравнения (2) можно ставить задачу Коши. Пусть известна плотность технических средств при  $t = 0$

$$n(t, s, r, l)|_{t=0} = n_0(s, r, l). \quad (3)$$

Числа  $u, v, w$  и функции  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  известные и определяются из обработки статистических данных за несколько лет.

Построим решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными значениями (3) в соответствии с общей теорией решения уравнений с частными производными первого порядка [3].

Предположим, что  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка по  $t$ , эти функции также ограничены:  $|\varphi(t)| \leq M; |f(t)| \leq M$ .

Уравнению (4) соответствует характеристическая система

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = u, \\ \frac{dr}{dt} = v, \\ \frac{dl}{dt} = w, \\ \frac{dn}{dt} = -\alpha_1 n(t, s, r, l) + \beta_1 \varphi(t) + f(t). \end{cases} \quad (4)$$

Пусть заданы начальные условия:  $s|_{t=0} = s_0; r|_{t=0} = r_0; l|_{t=0} = l_0$ .  
Решим первые три уравнения системы (4)

$$\begin{cases} s = ut + s_0; \\ r = vt + r_0; \\ l = wt + l_0. \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя решения (5) в последнее уравнение системы (4), интегрируем это уравнение с учетом  $n|_{t=0} = n_0(s_0, r_0, l_0)$ .

Для этого умножим уравнение  $\frac{dn}{dt} = -\alpha_1 n(t, s, r, l) + \beta_1 \varphi(t) + f(t)$  на  $e^{\alpha_1 t}$  и проинтегрируем левую и правую части по  $t$  от  $t = 0$  до  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{\alpha_1 t} n)}{dt} &= \beta_1 e^{\alpha_1 t} \varphi(t) + e^{\alpha_1 t} f(t), \\ e^{\alpha_1 t} n|_0^t &= \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} (\beta_1 \varphi(\tau) + f(\tau)) d\tau, \\ n &= e^{-\alpha_1 t} \left[ n_0(s_0, r_0, l_0) + \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} (\beta_1 \varphi(\tau) + f(\tau)) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя в (6) вычисленные в системе (5) значения, получим искоемое решение задачи Коши.

Численность техники в области  $\Omega_1$  равна в момент времени  $t$

$$N_0(t) = \iiint_{\Omega_1} n(t, s, r, l) ds dr dl. \quad (7)$$

Рассмотрим математическую модель ремонтных работ. Пусть в момент  $t$  на путях ремонтного предприятия находится  $y(t)$  ремонтируемых технических объектов и  $z(t)$  единиц отремонтированной техники. На предприятии количество ремонтируемой техники изменяется со скоростью  $\alpha y(t)$ , где  $\alpha > 0$ , за счёт постоянного поступления в ремонт на плановый ремонт и за счет непредвиденных выходов в ремонт техники со скоростью  $\gamma(t)$ . Скорость уменьшается пропорционально имеющейся в момент  $t$  техники и отремонтируемой —  $\beta y(t)z(t)$ . Количество отремонтированной увеличивается со скоростью  $\delta y(t)z(t)$  и уменьшается после завершения ремонта с последующей после оформления документов передачей её в эксплуатацию со скоростью  $\lambda z(t)$ , а также со скоростью  $h(t)$  за счет сверхплановых выполненных ремонтных работ.

В результате данных предположений имеем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha y(t) - \beta y(t)z(t) + g(t); \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \delta y(t)z(t) - \lambda z(t) - h(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \nu$  — как и ранее, постоянные параметры системы в виде положительных чисел, имеющих размерность, 1/сут;  $g(t), h(t)$  — среднестатистическое внеплановое поступление в ремонт и передачи в эксплуатацию отремонтированной техники.

Система (8) при  $g(t) = h(t) = 0$  есть известное уравнение Лотка — Вольтерра [4]. Будем искать решение системы (8) при заданных начальных условиях

$$\begin{aligned} y(t) \Big|_{t=t_0} &= y_0(t_0); \\ z(t) \Big|_{t=t_0} &= z_0(t_0), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $t_0$  — как и ранее, можно положить равным нулю, т. е. отсчёт вести с начала цикла;  $y_0(t_0), z_0(t_0)$  — положительные постоянные.

В соответствии с теорией исследования точек равновесия динамических систем [5], система (8–9) имеет устойчивый фокус; в точке либо центр, либо фокус, либо окружающие точку циклы, так

и расположенные между ними незамкнутые траектории, спиралевидно приближающиеся к этим циклам.

По условиям задачи искомые функции  $y(t)$  и  $z(t)$  ограничены, поэтому точки равновесия типа седла или узла в данном исследовании опускаются, т.к. искомые решения даже при ограниченных значениях  $t$  могут принимать неограниченные значения.

Для изучения стационарных точек системы (8) рассмотрим частный случай этой системы при  $g(t) = h(t) = 0$ , т. е. систему Лотка – Вольтерра при условии, что скорости равны нулю. Тогда система (8) имеет две стационарные точки:  $M(0,0)$  и  $N\left(\frac{\lambda}{\delta}; \frac{\alpha}{\beta}\right)$ .

Система (12) имеет первый интеграл  $f(y, z) = C$ , где  $C = \text{const}$ . Действительно, разделив второе уравнение системы (12) на первое, получим

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z(\delta y - \lambda)}{y(\alpha - \beta z)}. \quad (10)$$

Уравнение (10) есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{(\alpha - \beta z)dz}{z} = \frac{(\delta y - \lambda)dy}{y}. \quad (11)$$

Интегрируя полученное уравнение, будем иметь первый интеграл

$$f(y, z) = y^{\lambda} e^{-\delta y} \cdot z^{\alpha} e^{-\beta z} = y_0^{\lambda} e^{-\delta y_0} \cdot z_0^{\alpha} e^{-\beta z_0} = C. \quad (12)$$

Здесь постоянная  $C$  находится из начальных условий.

Рассмотрим стационарную точку  $M(0,0)$ . Вблизи этой точки  $|y(t)| < \varepsilon$  и  $|z(t)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малая величина. Тогда уравнение (10) можно записать в виде

$$\frac{dz}{dy} \approx -\frac{\lambda z}{\alpha y}. \quad (13)$$

Так как  $|y(t)z(t)|$  есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с  $y(t)$  и  $z(t)$ , то для исследования характера кривых в окрестности точки  $M(0,0)$  было положено  $yz = 0$ .

Из последнего уравнения следует, что в окрестности  $M(0,0)$



$$\frac{dz}{z} \approx \frac{\lambda}{\alpha} \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln z \approx \ln y^{\frac{\lambda}{\alpha}} \Rightarrow \ln C \Rightarrow zy^h = C_1, \quad (14)$$

$$C_1 = \text{const}, h = \frac{\lambda}{\alpha},$$

т. е. вблизи начала координат  $M(0,0)$  получаются линии гиперболической формы. В окрестности точки  $N\left(\frac{\lambda}{\delta}; \frac{\alpha}{\beta}\right)$  запишем  $y(t) = \frac{\lambda}{\delta} + \tilde{y}(t); z(t) = \frac{\alpha}{\beta} + \tilde{z}(t)$  и будем рассматривать  $|\tilde{y}(t)| < \varepsilon$  и  $|\tilde{z}(t)| < \varepsilon$ .

Тогда уравнение (10) примет вид с точностью до членов первого порядка по  $\tilde{y}$  и  $\tilde{z}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}} &\approx \frac{\left(\tilde{z} + \frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(\tilde{y} + \frac{\lambda}{\delta}\right)} \frac{(\delta\tilde{y} + \gamma - \lambda)}{(\alpha - \alpha - \beta\tilde{z})} \approx \frac{\delta\frac{\alpha}{\beta}\tilde{y}}{-\beta\frac{\lambda}{\delta}\tilde{z}} \Rightarrow -\beta\frac{\lambda}{\delta}\tilde{z}d\tilde{z} \approx \\ &\approx \delta\frac{\alpha}{\beta}\tilde{y}d\tilde{y} \Rightarrow \delta^2\alpha\tilde{y}^2 + \beta^2\lambda\tilde{z}^2 = C_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $C_2 = \text{const}$  или

$$\delta^2\alpha\left(y - \frac{\lambda}{\delta}\right)^2 + \beta^2\lambda\left(z - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = C_2. \quad (20)$$

Отсюда следует, что в окрестности точки  $N\left(\frac{\lambda}{\delta}; \frac{\alpha}{\beta}\right)$  кривые на фазовой плоскости будут замкнутыми траекториями, и точка  $N$  будет представлять собой особую точку, именуемую центром. Замкнутые траектории могут являться эллипсами или подобными эллипсу конфигурациями (рис. 1).

Проиллюстрируем аналитические исследования, рассмотрев численное решение нелинейной дифференциальной системы (8).

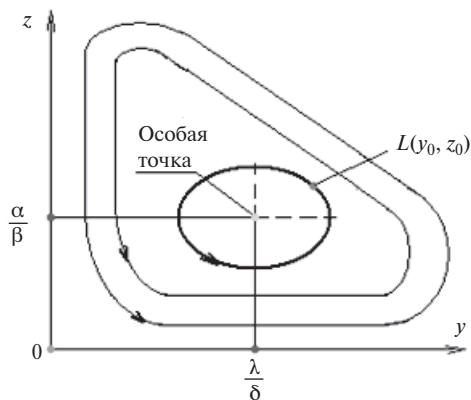


Рис. 1. Фазовый портрет для системы двух уравнений (8) при  $g(t), h(t) = 0$

**Пример 1.** Зададим интервалы интегрирования  $t_0 := 0$  и  $t_1 := 20$ .

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями. Используем для решения системы блок Give-Odesolve пакета MathCAD 14.

Given

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= 0,8y(y) - 0,35y(t)z(t) + 9,2, \\ \frac{d}{dt}z(t) &= -0,6z(t) + 0,3y(t)z(t) - 8,5,\end{aligned}$$

$$y(t_0) = 10,$$

$$z(t_0) = 11,$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, t_1 \right].$$

Здесь  $y = y(t)$  — количество ремонтируемой техники,  $z = z(t)$  — количество отремонтированной техники.

Получили графики функций  $y(t)$  и  $z(t)$  (рис. 2).

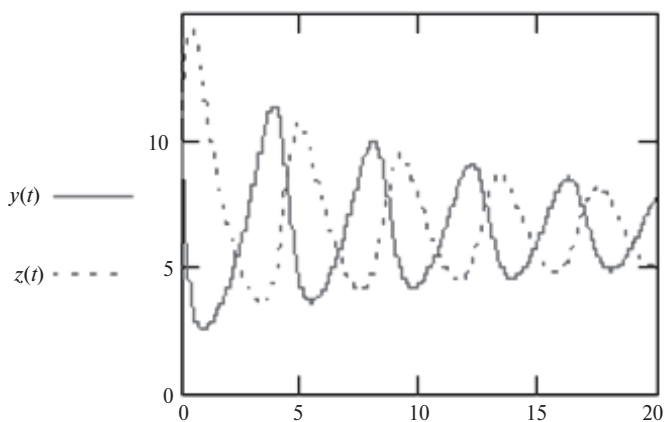


Рис. 2. График функций  $y(t)$ ,  $z(t)$

Фазовый портрет представлен на рис. 3.

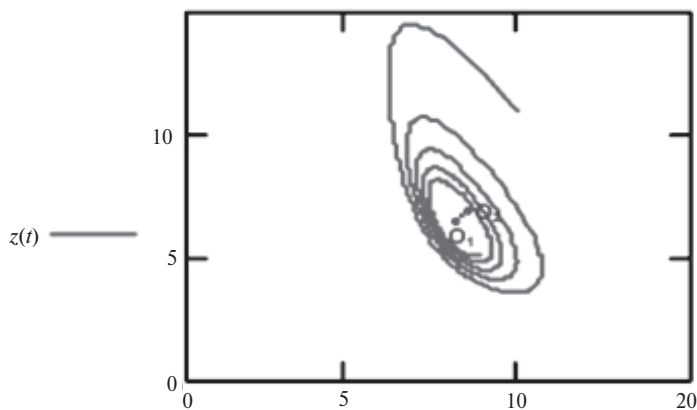


Рис. 3. Фазовый портрет системы Лотка – Вольтерра

**Пример 2.** Определим начальные условия:  $\alpha = 0,9$ ;  $\beta = 0,35$ ;  $\delta = 0,3$ ;  $\lambda = 0,8$ ;  $g(t) = 10$ ;  $h(t) = 9$ . Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями:  $t_0 := 0$ ,  $y_0 = 10$ ;  $z_0 = 11$ .

Зададим интервал интегрирования  $t_0 := 0$  и  $t_1 := 20$ .

Используем для решения системы блок Given – Odesolve пакета MathCAD 14.

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = 0,9 \cdot y(t) - 0,35 \cdot y(t) \cdot z(t) + 10,$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = 0,3 \cdot y(t) \cdot z(t) - 0,8 \cdot z(t) - 9,$$

$$y(t_0) = 10,$$

$$z(t_0) = 9,$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 20 \right].$$

Получили графики функций  $y(t)$  и  $z(t)$  (рис. 4).

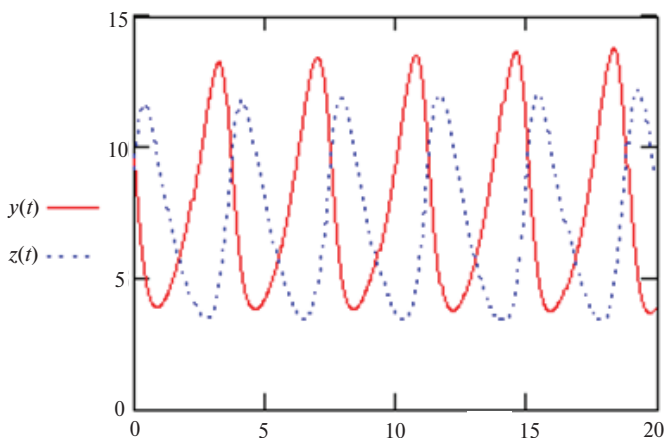


Рис. 4 . График функций  $y(t)$ ,  $z(t)$

Фазовый портрет представлен на рис. 5.

Здесь  $y = y(t)$  – количество ремонтируемых вагонов,  $z = z(t)$  – количество отремонтированных вагонов.

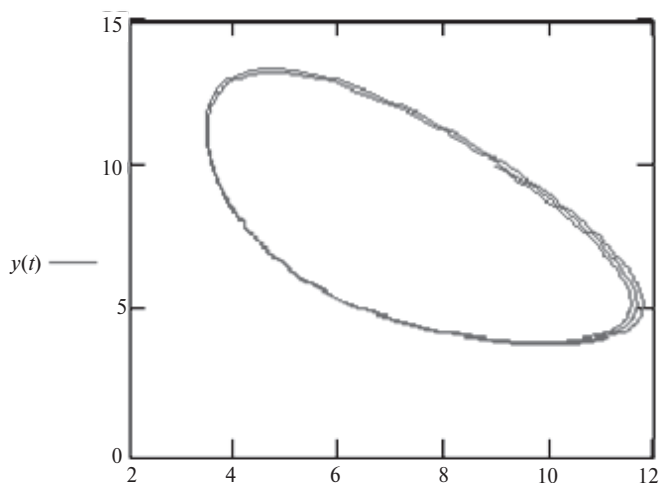


Рис. 5. Фазовый портрет системы Лотка – Вольтерра

Характер колебаний функций (рис. 2–5)  $y(t)$  и  $z(t)$  в зависимости от принятых начальных условий имеет различный вид, но почти периодический характер. Получившаяся фазовая траектория действительно имеет вид «накручивающейся» спирали, что показывает на близкий к гармоническим колебаниям характер производственного процесса и достаточно устойчивую работу предприятия, реализующего различные виды ремонта.

### Выводы

В работе рассмотрены математические модели динамики численности технических средств. Найдено решение о численности технических средств в зависимости от влияния нескольких эксплуатационных параметров на износ техники в целом.

Построена математическая модель ремонтных работ на основе системы Лотка – Вольтерра. С помощью пакета MathCAD 14 получены различные виды кривых решений и фазовых портретов систем решения, соответствующие различным значениям параметров системы и начальным условиям задачи. Для системы двух дифференциальных уравнений вида (8) найдены фазовые траектории, численно решена задача Коши с последующим построением графических

зависимостей  $y(t)$  и  $z(t)$ . Вид фазового портрета, характеризующий собой ритмичность и/или неритмичность ремонтного процесса, в основном зависит от значений параметров системы двух дифференциальных уравнений (8) и принятых начальных условий задачи.

На основе статистических данных найдены рациональные значения параметров системы, при котором вид фазовых портретов характеризуется семейством близких к эллипсоподобным фигурам, вложенных один в другой, описываемых вокруг центра — стационарной точки системы дифференциальных уравнений. Такой вид фазовых портретов соответствует обеспечению устойчивой работы предприятий.

Дифференциальные модели динамики численности и ремонта технических средств железнодорожного транспорта могут быть использованы для оптимизации численности транспортных средств для обеспечения перевозочного процесса и выполнения ремонтных работ на предприятии.

## Литература

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учебное пособие / Изд. 2-е, испр. и доп. / А. В. Гасников и др. / под ред. А. В. Гасникова. — М. : МЦНМО, 2013. 428 с. ISBN 978-5-4439-0040-7.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б. Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. — М. : Физмалит, 2005. 256 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2; изд. 6-е. — М. : Наука, 1981. 551 с.
4. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Д. Эрроусмит, К. Плэйс. — М. : Мир, 1986. 243 с.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М. : Изд-во Московск. ун-та, 1984.

**К.В. Бердников,**

Институт машиноведения УрО РАН,

**В.В. Стружанов,**

д-р физ.-мат. наук, Уральский государственный университет путей  
сообщения, гл. научн. сотрудник Института машиноведения УрО РАН

## Общие положения теории разрушения механических систем

### Введение

Основы теории разрушения, базирующейся на использовании полностью равновесных диаграмм деформирования или функций сопротивления, были заложены в работах [1–3]. Также было осуществлено для некоторых частных случаев экспериментальное построение таких диаграмм [4, 5]. Дальнейшее развитие этой теории требует разработки специальных методик уточненного расчета предельной несущей способности механических систем, а также изучения их свойств до момента, когда происходит разделение исходной системы на несколько подсистем.

В настоящей работе применена концепция функций сопротивления для исследования свойств разрушаемых механических систем.

Пусть механическая система  $\Omega + \Gamma$ , температура и свойства которой не изменяются с течением времени, нагружена уравновешенной системой граничных  $f_1(y, t)$ ,  $y \in \Gamma' \subset \Gamma$  и массовых  $f_2(x, t)$ ,  $x \in \Omega' \subset \Omega$  сил, а также системой самоуравновешенных в  $\Omega$  начальных внутренних сил  $f_3(x)$ . Здесь  $\Omega$  и  $\Gamma$  — множества внутренних и граничных точек,  $\Omega' + \Gamma'$  — множество точек приложения сил,  $t \in R$  — текущее время ( $R$  — множество вещественных чисел). Частным случаем такой системы является деформируемое твердое тело.

Вектора перемещений граничных и внутренних точек системы представляют собой отображения

$$u(y, t): R \rightarrow \{f_1, f_2, f_3\} \rightarrow H_1(\Gamma), v(x, t): u \rightarrow H_2(\Omega), \quad (1.1)$$

где  $H_1(\Gamma)$  и  $H_2(\Omega)$  — пространства вектор-функций, определенных на  $\Gamma$  и  $\Omega$ .

**Определение 1.** Совокупность функций  $\{u', v'\}$ , где  $u' = u(y, t)$ ,  $y \in \Gamma$ ;  $v' = v(x, t)$ ,  $x \in \Omega'$ , называется путем деформирования механической системы.

**Определение 2.** Разрушением механической системы называется разделение ее на несколько подсистем, силы взаимодействия между точками которых бесконечно малы.

Запишем теперь теорему об изменении кинетической энергии

$$T_0 - T = \Pi^i + \Pi^e, \quad T_0 = T|_{t=0}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} T &: (u, v) \rightarrow R, \Pi^i: (u, v, v_0, f_3) \rightarrow R, \\ \Pi^e &: (u', v', f_1, f_2) \rightarrow R, v_0 = v(x, 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

соответственно кинетическая энергия, внутренняя и внешняя потенциальные энергии, равные работе внутренних и внешних сил, взятой со знаком минус.

**Теорема 1.** *Механическая система разрушается при деформировании ее по данному пути тогда и только тогда, когда существует такой момент времени  $t_*$ , что для всех  $t > t_*$  и  $f_1 = f_1(t_*)$ ,  $f_2 = f_2(t_*)$  выполняется неравенство*

$$\Pi^i + \Pi^e - T_0 < 0. \quad (1.4)$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть при  $t > t_*$  механическая система разделяется (разрушается) на две части, т. е. множество  $\Omega$  распадается на подмножества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а множество  $\Gamma$  — на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . При разрушении эти подсистемы перемещаются относительно друг друга, силы взаимодействия между их точками бесконечно малы. Поэтому внешние силы не уравновешены в  $\Omega_1 + \Gamma_1$  и  $\Omega_2 + \Gamma_2$ . Следовательно, под действием неуравновешенных постоянных сил  $f_1 = f_1(t_*)$ ,  $f_2 = f_2(t_*)$  будут двигаться как неизменяемые до тех пор, пока не прекратится действие сил. Отсюда неравенство (1.3) выполняется с момента разрушения.

**Достаточность.** Допустим, что при выполнении условий теоремы расстояния между всеми внутренними точками системы остаются ограниченными. Тогда точки должны то сближаться, то расходиться. Однако при действии постоянных сил это невозможно. Следовательно, расстояние, по крайней мере, между некоторыми точками растет и с течением времени достигает такой величины, при кото-



рой силы взаимодействия между ними станут бесконечно малыми. А так как в силу неравенства (1.4) этот процесс будет продолжаться и далее, то система неминуемо разрушится.

**Следствие.** Разрушение механической системы возможно осуществить только тогда, когда на данном пути деформирования  $\sup \Pi^i < \infty$ .

Введем отображение  $\mu: \{u', v'\} \rightarrow R$ , которое является мерой пути деформирования. Тогда в силу отображений (1.1) и (1.3) имеем  $T: \mu \rightarrow R, \Pi^i: \mu \rightarrow R, \Pi^e: \mu \rightarrow R$ .

**Определение 3.** Деформирование механической системы называется равновесным, если в процессе его  $T = \text{const}$ .

**Определение 4.** Функции  $\Phi_\mu = \Phi(\mu) = -\frac{d\Pi^i}{d\mu}, P_\mu = P(\mu) = -\frac{d\Pi^e}{d\mu}$ , где

$\Pi^i$  и  $\Pi^e$ , полученные при равновесном деформировании, называются функциями сопротивления и равновесного нагружения для данного пути.

Дифференцируя равенство (1.2) по  $\mu$  при  $T = \text{const}$ , находим, что

$P_\mu = -\Phi_\mu$ , а  $\Pi^i = -\int_\mu \Phi_\mu d\mu$ . Отсюда, используя следствие теоремы 1, получаем, что при разрушении механической системы, когда  $\mu \rightarrow \infty$ , функция сопротивления — бесконечно малая величина. Ниже при разрушении полагаем  $\Phi_\mu = 0$ .

В пространстве  $\mu\Phi$  функция сопротивления представляет собой кривую равновесных состояний системы. Если при неизвестном пути деформирования температура и свойства системы зависят от времени, то  $\Phi = \Phi(\mu, t)$  и в пространстве  $t\mu\Phi$  получаем поверхность равновесия.

Поставим теперь в соответствие реальной механической системе идеальную (идеально упругую), которая отличается только тем, что силы взаимодействия между её точками все время подчиняются линейному закону.

**Определение 5.** Разность  $\Psi_\mu = \Phi_I - \Phi_\mu$ , где функции сопротивления идеальной  $\Phi_I(\mu)$  и реальной  $\Phi(\mu)$  систем построены при одном и том же пути деформирования, называется функцией повреждения для данного пути.

Очевидно, что в момент разрушения  $\Psi = \Phi_I$ . Далее, определяя из уравнения  $\Phi(\mu) = \Phi_I(\mu')$  значение  $\mu'$ , находим величину энергии

$$\Pi_{\text{уп}}^i = -\int_{\mu'} \Phi_I d\mu',$$

которая выделяется из системы, если после достижения заданного значения  $\mu$  произвести разгрузку по линейному закону, не изменяя пути деформирования. Величина  $\mu_n = \mu - \mu'$  является мерой неупругости системы. При разрушении  $\Phi_\mu = 0$  и, следовательно,  $\mu' = 0$ . Отсюда в момент разрушения  $\Pi_{уп}^i = 0$ ,  $\mu_n = \mu$ . Заметим также, что после разгрузки сопротивление системы равно нулю (внешние силы отсутствуют). Поэтому  $\Psi = \Phi_I(\mu_n)$  и

$$\Phi(\mu) = \Phi_I(\mu) - \Phi_I(\mu_n). \quad (2.1)$$

Опираясь на изложенное выше, сделаем следующее заключение. В процессе деформирования реальная механическая система теряет свою упругость и разрушение осуществляется в момент полного её исчезновения.

Рассмотрим пропорциональное нагружение твердого тела при отсутствии объемных сил. В данном случае  $f_1(y, t) = \beta(t)f_0(y)$ ,  $y \in \Gamma$ ,  $\beta : t \rightarrow R$ . Кроме того,  $u'(y, t) = \alpha(t)u'_0(y)$ ,  $y \in \Gamma$ ,  $\alpha : t \rightarrow R$ , где  $u'_0$  — перемещения, соответствующие силам  $f_0$ . Если  $f_0 \in H_1(\Gamma)$ ,  $u'_0 \in H_1(\Gamma)$ , а обычно  $H_1(\Gamma) = H_2(\Gamma)$ , то пути нагружения и деформирования представляют собой лучи в пространстве  $H_1(\Gamma)$ . Исключив параметр  $t$ , получаем  $f_1 = \beta(\alpha)f_0$ ,  $u' = \alpha u'_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Pi^i &= -\Pi^e = \int_{\Gamma} \int_{u'} f_1(y, t) du(y, t) d\Gamma = \int_{\Gamma} \int_0^\alpha \beta(\alpha) f_0(y) \cdot u'_0(y) d\alpha d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma'} f_0 \cdot u'_0 d\Gamma' \int_0^\alpha \beta(\alpha) d\alpha = (f_0, u'_0)_{H_1(\Gamma')} \int_0^\alpha \beta(\alpha) d\alpha, \alpha = 0, \infty. \end{aligned}$$

Здесь  $(f_0, u'_0)_{H_1(\Gamma')}$  — скалярное произведение в пространстве  $H_1(\Gamma')$ .

Очевидно, что  $(f_0, u'_0)_{H_1(\Gamma')} = (f_0, u_0)_{H_1(\Gamma')}$ . Далее имеем  $\mu = \alpha$ . Поэтому

$$P_\alpha = -\Phi_\alpha = -\frac{d\Pi^e}{d\alpha} = (f_0, u_0)_{H_1(\Gamma')} \beta(\alpha).$$

Для идеально упругого тела

$$\Pi_I^1 = (f_0, u_0)_{H_1(\Gamma')} \alpha^2 / 2, \quad \Phi_I = -(f_0, u'_0)_{H_1(\Gamma')} \alpha.$$

Отсюда  $\Psi = -(f_0, u_0)_{H_1(\Gamma)}(\alpha - \beta(\alpha))$ . Определяя теперь  $\alpha_n$ , получаем  $\alpha_n = \alpha - \beta(\alpha)$  и, наконец, из формулы (2.1):

$$\Phi_\alpha = -(f_0, u_0)_{H_1(\Gamma)}(\alpha - \alpha_H).$$

В качестве иллюстрации рассмотрим также систему, состоящую из атомов  $a$  и  $b$ , лежащих на оси  $ox$ , причем атом  $a$  закреплён, а  $b$  расположен в начале координат. Сила взаимодействия между атомами известна и равна  $f^i = -Ex_e^{-x/x_c}$  [6], где  $x$  — величина удлинения системы, равная перемещению точки  $b$ ;  $x_c$  — величина удлинения, соответствующая максимальной силе;  $E$  — модуль Юнга.

Будем равномерно растягивать эту систему вдоль оси  $ox$ . Тогда прямая  $ox$  — путь деформирования и  $\mu = x$ . Определяя функции равновесного нагружения и сопротивления растяжению, получаем  $P_x = -\Phi_x = f$ . Кроме того,

$$\Phi_I = -Ex, \quad x_H = x(1 - Exe^{-x/x_c}),$$

$$\Psi - Ex_H, \quad \Phi_x = -E(x - x_H).$$

Если к атому  $b$  мгновенно приложена постоянная растягивающая сила  $f^e$ , то, используя неравенство (1.4) при  $T_0 = 0$ , находим, что система разрушается когда

$$f^e > Ex_c^2 \max_x \left\{ \frac{1}{x} - e^{-x/x_c} \left( \frac{1}{x_c} - \frac{1}{x} \right) \right\}.$$

Возьмем далее механическую систему, например, какую-нибудь машиностроительную конструкцию, состоящую из  $n$  подсистем (деталей) с достаточно гладкими функциями сопротивления  $\Phi_n$ .

Пусть  $\mu \in R$  — мера данного пути деформирования всей системы,  $\mu \in R^r$  — мера смещений точек  $n$ -го по счету пересечения (касания) подсистем, а  $m_n : (\mu, \mu_r) \rightarrow R$  — мера пути деформирования  $n$ -й подсистемы. Найдем сначала функцию равновесного нагружения  $P_\mu$  всей системы. Для этого следует каждый раз брать конкретное значение этой функции  $P \in R$  и определять величины параметров  $\mu$  и  $\mu_r$ , при которых система находится в равновесии. Поэтому естественно считать  $P$  параметром управления,  $C_p = R$  — пространством управления,  $\mu$  и  $\mu_r$  — параметрами состояния,  $S_p = R \times R^r$  — пространством состояний ( $\mu \in R, \mu_r \in R^r$ ). Здесь символом  $\times$  обозначено декартово произведение одномерного и  $r$ -мерного пространств действительных чисел.

Запишем выражение для полной энергии системы

$$\Pi = \Pi^i + \Pi^e = - \sum_n \int_{m_n} \Phi_n dm_n - \int_{\mu} P_{\mu} d\mu,$$

которое можно рассматривать как однопараметрическое семейство функций  $\Pi = V_p : S_p \cdot C_p \rightarrow R$ . Проведем анализ критических точек потенциалов  $V_p$ , определяемых уравнениями

$$\partial V_p / \partial \mu_r = 0, \partial V_p / \partial \mu = 0. \quad (3.1)$$

Очевидно, что для данного значения  $P$  все положения равновесия механической системы получаются решением системы уравнений (3.1). Множество этих решений — точки  $(\mu, \mu_1, \dots, \mu_r, P)$  — образуют в пространстве  $\mu_1 \dots, \mu_r, P$  многообразии катастрофы  $M_p$  [7].

Среди решений уравнений (3.1) особое значение имеют те, которые обращают в нуль определитель матрицы Гессе  $HV_p$  функции  $V_p$ , т. е. удовлетворяют уравнению

$$\det(HV_p) = \det \left[ \frac{\partial^2 V_p}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right] = 0, i, j = 0, 1, \dots, r, \mu_0 = \mu. \quad (3.2)$$

Совместные решения уравнений (3.1) и (3.2) являются вырожденными критическими точками и образуют особое множество многообразия катастрофы. Образ этого множества в пространстве управления, построенный по правилу  $(\mu, \mu_1, \dots, \mu_r, P) \rightarrow P$ , называется бифуркационным множеством  $B_p$  [7].

Известно, что характер критических точек изменяется лишь при переходе через вырожденные критические точки, которые делят многообразие  $M_p$  на зоны [7]. Там, где  $\det(HV_p) > 0$ , потенциал  $V_p$  имеет минимум, и система находится в устойчивом положении равновесия. В зонах, где  $\det(HV_p) < 0$ , потенциал  $V_p$  имеет максимум, и положения равновесия системы неустойчивы.

Отображая многообразие  $M_p$  на плоскость  $\mu P$  по правилу  $(\mu, \mu_1, \dots, \mu_r, P) \rightarrow (\mu, P)$ , получаем искомую функцию  $P_{\mu}$ . При этом зоны неустойчивых положений равновесия образуют нисходящие, а зоны устойчивых положений равновесия — восходящие участки функции. Множество  $M_p^*$  отображает в точки, где  $\partial P_{\mu} / \partial \mu = 0$ , и образы этих точек в пространстве управления совпадают с элементами множества  $B_p$ .

После определения функции  $P(\mu)$  легко найти и тот путь в пространстве управления, который соответствует равновесному деформированию системы.

Пусть теперь параметр управления монотонно возрастает. Когда  $P < P_1$ , где  $P_1$  — наименьший элемент множества  $B_p$ , система находится в устойчивом положении равновесия. Затем, достигая значения  $P_1$  и возмущая его членом  $\gamma P_1$ , находим, что для сколь угодно малых  $\gamma > 0$  у системы появляется несколько новых положений равновесия, и она стремится занять ближайшее устойчивое положение. Если при этом энергия системы убывает (становится отрицательной) на конечную величину, то переход осуществляется скачком, в результате которого  $\mu$  увеличивается на конечную величину, т. е. бесконечно малые гладкие изменения параметра управления в данном случае приводит к разрывному изменению параметров состояния.

Итак, сначала положение системы определяется точками восходящей ветви, выходящей из начала координат. При переходе на ниспадающую ветвь происходит скачок (катастрофический прыжок) в направлении точки пересечения прямой  $P = P_{1c}$  и кривой  $P(\mu)$ . Здесь  $P_{1c}$  — значение параметра управления, при котором происходит первый скачок.

Далее, используя теорему 1, выясним, разрушится система в процессе скачка или нет, и где будет новое положение равновесия. При этом следует учитывать возможности изменения при скачке пути деформирования системы, смещения положения равновесия с многообразия  $M_p$  из-за колебаний в системе и различия законов активного нагружения и разгрузки, а также другие эффекты, характерные для динамики. После скачка необходимо построить уже новое многообразие катастрофы и провести аналогичный анализ, определяя  $P_{2c}$ , и т. д.

Наконец, если задаются не внешние силы, а перемещения точек границы, то для исследования поведения системы нужно найти многообразие катастрофы  $M_\mu$  и бифуркационное множество  $B_\mu$ , которые получаются соответственно отображением  $M_p$  в пространство  $\mu_1 \dots \mu_r$  по правилу  $(\mu, \mu_1, \dots, \mu_r, P) \rightarrow (\mu, \mu_1, \dots, \mu_r)$ , и отображением особого множества  $M_\mu^*$ , состоящего из точек многообразия  $M_\mu$ , удовлетворяющих уравнению  $\det(HV_\mu) = 0$ , в пространство управления  $C_\mu = R$  ( $\mu \in C_\mu$ ) по правилу  $(\mu, \mu_1, \dots, \mu_r) \rightarrow \mu$ . Заметим, что множество  $B_\mu$  можно построить, отобразив точки кривой  $P_\mu$ , где  $\partial P_\mu / \partial \mu = \infty$ , на ось  $O\mu$  по правилу  $(\mu, P) \rightarrow \mu$ .

## Заключение

Таким образом, в работе, применяя аппарат математической теории катастроф, установлены общие положения теории разрушения, базирующейся на использовании полностью равновесных диаграмм деформирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00186).

## Литература

1. Волков С. Д. Проблемы прочности и механика разрушения // Проблемы прочности, 1978. № 7. С. 3–10. ISSN 0556-171X. Теория упругости. М. : Наука, 1970. 940 с.
2. Волков С. Д., Дубровина Г. И., Соковнин Ю. П. Устойчивость сопротивления материала в механике разрушения // Проблемы прочности, 1978. № 6. С. 65–69. ISSN 0556-171X.
3. Волков С. Д., Дубровина Г. И., Соковнин Ю. П. О краевой задаче механики разрушения // Проблемы прочности, 1978. № 1. С. 3–7. ISSN 0556-171X.
4. Волков С. Д., Гуськов Ю. П., Кривоспицкая В. И. и др. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении // Проблемы прочности, 1979. № 1. С. 3–6. ISSN 0556-171X.
5. Лебедев А. А., Чаусов Н. Г. Установка для испытания материалов с построением полностью равновесных диаграмм деформирования // Проблемы прочности, 1981. № 12. С. 104–105. ISSN 0556-171X.
6. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ, 1969. Т. 33; вып. 2. С. 212–222. ISSN 0032-8235.
7. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М. : Мир, 1980. 608 с.

**Т. А. Волкова,**

канд. физ.-мат. наук, Уральский государственный университет  
путей сообщения

## **Анализ влияния вида распределения случайного нагружения на параметры усталостной долговечности металлов**

**Б**ольшинство деталей железнодорожных конструкций работает в условиях развития усталостной поврежденности металла. При этом наблюдается значительный разброс долговечности, то есть числа циклов до разрушения при работе одинаковых деталей в похожих условиях эксплуатации. Одной из причин этого является случайность нагрузок, действующих на детали механизмов. Для уточненных расчетов на усталость нужно применять методы теории вероятностей и математической статистики, использующие статистический материал, накопленный в процессе эксплуатации машин и конструкций [1, 2].

Рассмотрим влияние случайных напряжений для прогнозирования долговечности материалов при циклическом нагружении. Основной характеристикой выносливости детали является кривая усталости Велера [1]. Уравнение линии усталости запишем в виде

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_r}\right)^\alpha = \frac{N_0}{N}, \sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}).$$

Здесь  $\sigma_a$  — амплитуда (напряжение) цикла;  $\sigma_r$  — предел выносливости при коэффициенте асимметрии цикла  $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ ;  $N$  — число циклов до разрушения (долговечность) детали при данной амплитуде цикла;  $N_0$  — число циклов, соответствующее точке перелома кривой Велера в логарифмических координатах. Показатель степени  $\alpha$  зависит от свойств материала и условий эксперимента. Величина  $\alpha$  изменяется от 3 до 20, и ее значения рекомендуются для расчета каждой конкретной детали в соответствии с инженерным опытом.

На рис. 1 приведена кривая усталости для стали, связывающая напряжение амплитуды цикла  $\sigma_a$  и долговечность  $N$ .

Параметры, влияющие на расчет долговечности, являются случайными величинами и имеют большой разброс. Долговечность можно рассматривать как функцию случайных величин.

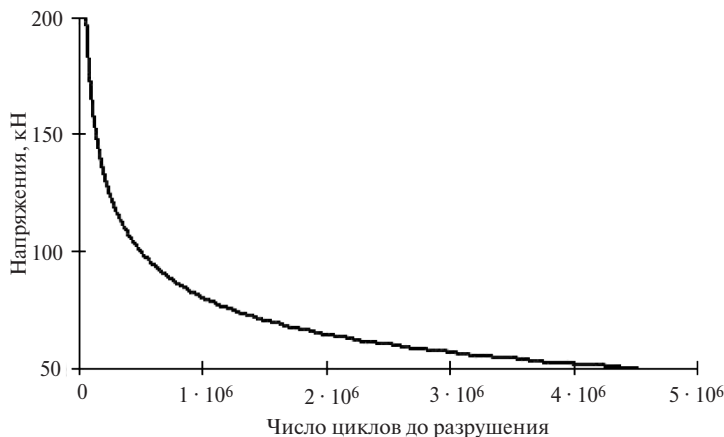


Рис. 1. Линия усталости Велера

Если случайные величины  $X$ ,  $Y$  связаны функциональной зависимостью  $Y = \varphi(X)$ , то на интервалах монотонности определяется обратная функция  $X = \psi(Y)$ , вычисляется ее производная  $\psi'(Y)$ . Плотность распределения  $g(y)$  случайной величины  $Y$  и плотность распределения  $f(x)$  случайной величины  $X$  связаны зависимостью

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|.$$

Функции распределения  $F(x)$  и  $G(y)$  случайных величин  $X$  и  $Y$  связаны зависимостью

$$G(y) = \int_{-\infty}^y f(\psi(t)) \psi'(t) dt = [\psi(t) = t] = \int_{-\infty}^{\psi(y)} f(t) dt = F(\psi(y)).$$

Рассмотрим число циклов до разрушения  $N$  как функцию случайной амплитуды цикла. Пусть случайная амплитуда цикла усталостного нагружения  $\sigma_a$  задана плотностью  $f(x)$  и функцией  $F(x)$  распределения вероятностей. Вычислим плотность распределения  $g(y)$  случайного числа циклов  $N$  до разрушения, если  $N(\sigma_a)$  задано уравнением (1). Выразим зависимость долговечности  $N(\sigma_a)$  от амплитуды цикла и параметров  $N_0$ ,  $p = \sigma_r$ .

$$N(\sigma_a) = N_0 \left( \frac{\sigma_a}{p} \right)^{-\alpha}.$$



Введем обозначения:

$$y = \varphi(x) = N_0 \left( \frac{p}{x} \right)^\alpha, \quad x = \psi(y) = p \left( \frac{N_0}{y} \right)^\beta, \quad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Для функции  $x = \psi(y)$  вычислим производную по  $y$ :

$$x' = \psi'(y) = -\frac{p\beta N_0}{y^2} \left( \frac{N_0}{y} \right)^{\beta-1}.$$

В результате получим плотность распределения вероятностей  $g(y)$ .

$$g_N(y) = f_\sigma(\psi(y)) |\psi'(y)|, \quad \text{где} \quad \psi(y) = p \left( \frac{N_0}{y} \right)^\beta.$$

Вероятность попадания случайной долговечности  $N$  в диапазон  $(N_1, N_2)$  вычислим с помощью функции распределения по формулам (4–7).

$$P(N_1 \leq N \leq N_2) = F(\psi(N_2)) - F(\psi(N_1)).$$

При движении вагонов по железной дороге необходимо учитывать неравномерность железнодорожного полотна [3]. Применим методы теории функций от случайных величин для прогнозирования усталостного разрушения при движении вагона на стыках рельсов. В работе [4] приведены осциллограммы динамических усилий при наезде колес на стык рельсов. Наезд колесной пары на стык осуществляется в условиях колебательного процесса, проявляющегося в подпрыгивании и галопировании кузова, вызванных его наездом на неровность.

Изучение по осциллограмме относительных частот для различных значений нагрузок дает возможность найти вероятности включения случайных нагрузок в заданные интервалы и построить соответствующую гистограмму. Проведем статистическую обработку одной из осциллограмм динамических усилий, возникающих при движении вагона со скоростью 51 км/ч.

Диапазон изменения усилий на стыке рельса составляет в этом случае от 100 кН до 400 кН. Разделим диапазон на десять интервалов: 100–130, 130–160, 160–190, 190–220, 220–250, 250–280, 280–310, 310–340, 340–370, 370–400. В таблице 1 представлены левые края интервалов и относительные частоты величин, попавших в интервал.

Таблица 1

Эмпирическое распределение частот динамических усилий

Конец интервала	100	130	160	190	220	250	280	310	340	370
Относительная частота	0,112	0,167	0,225	0,194	0,140	0,084	0,033	0,028	0,017	0,008

Используя данные таблицы 1, построим соответствующую гистограмму. На рис. 2 полученная гистограмма представлена также теоретической плотностью распределения вероятностей.

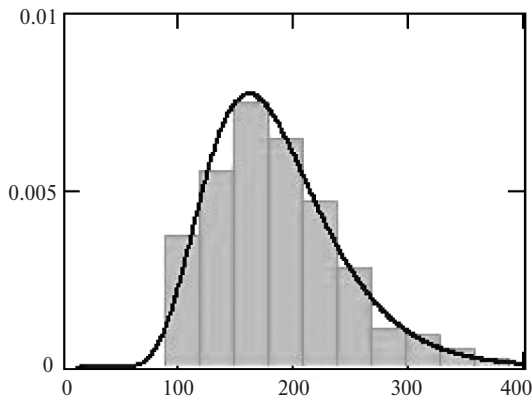


Рис. 2. Гистограмма динамических усилий на стыке рельсов

Статистическая обработка гистограммы динамических усилий дает выборочное среднее  $m = 184,23$  кН, среднее квадратичное отклонение  $s = 58,32$  кН, коэффициент асимметрии  $As = 0,675$ , коэффициент эксцесса  $Ex = 0,31$ .

Рассмотрим возможность представления гистограммы в виде плотности некоторого теоретического распределения. Затем проверим влияние вида теоретического распределения на искомую плотность распределения усталостной долговечности. Форма гистограммы показывает, что для ее приближения можно взять нормальное распределение, логарифмически нормальное распределение и распределение Релея. Каждый вариант проверим по критерию Пирсона на уровне значимости 0,05. Число степеней свободы равно 7, так как у нас 10 интервалов и каждое гипотетическое распределение зависит от двух параметров. В этом случае значение критерия Пирсона  $\chi_{\alpha}^2 = 14,07$ .

*Нормальное распределение.* Запишем плотность нормального  $f1(x)$  распределения с параметрами  $m$  и  $s$ . Для функции нормального распределения  $F1(x)$  используем интеграл Лапласа  $\Phi(x)$ .

$$f1(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right), \quad F1(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{s}\right).$$

Параметры  $m$  и  $s$  будут равны соответствующим эмпирическим значениям:  $m = 184,23$ ,  $s = 58,32$ . Проверая функцию  $f1(x)$  по критерию Пирсона, получим наблюдаемое значение  $\chi = 12,3 < 14,07$ . Следовательно, нормальное распределение может быть принято как теоретическое для данной гистограммы.

Используя формулы для расчета функций от случайных величин, вычислим плотность распределения  $g1(y)$  и функцию распределения  $G1(y)$  случайной долговечности  $N$ .

$$g1(y) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\psi(y)-m)^2}{2s^2}\right) |\psi'(y)|.$$

$$G1(y) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\psi(y)-m}{s}\right).$$

*Логарифмически нормальное распределение* описывает случайную положительную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами  $a$ ,  $b$ . Плотность распределения вероятностей  $f2(x)$  в этом случае имеет вид

$$f2(x) = \frac{1}{xb\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}\right).$$

Соответствующая функция распределения  $F2(x)$  записывается через интеграл Лапласа  $\Phi(x)$

$$F2(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\ln x - a}{b}\right).$$

Математическое ожидание  $m$  и дисперсия  $D$  логарифмически нормального распределения выражаются через параметры  $a$ ,  $b$ :

$$m = \exp(a + 0,5b^2), \quad D = m^2 (\exp(b^2) - 1).$$

Запишем также обратную зависимость параметров  $a, b$  через математическое ожидание и дисперсию:

$$a = \ln \frac{m^2}{\sqrt{D + m^2}}, \quad b^2 = \ln \left( \frac{D}{m^2} + 1 \right).$$

Вычислим параметры логарифмически нормального распределения по данным гистограммы при  $m = 184,23$ ,  $D = 3401,12$ . Тогда  $a = 5,168$ ;  $b = 0,309$ . Проверив функцию  $f_2(x)$  по критерию Пирсона, получим наблюдаемое значение  $\chi = 8,6 < 14,07$ . Следовательно, логарифмически нормальное распределение также может быть принято как теоретическое для данной гистограммы.

Используя формулы для расчета функций от случайных величин, вычислим плотность распределения  $g_2(y)$  и функцию распределения  $G_2(y)$  случайной долговечности  $N$ .

$$g_2(y) = \frac{1}{\psi(y)b\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(\ln \psi(y) - a)^2}{2b^2} \right) |\psi'(y)|.$$

$$G_2(y) = \frac{1}{2} + \Phi \left( \frac{\ln \psi(y) - a}{b} \right).$$

*Распределение Релея* обладает подходящей асимметрией и достаточно хорошо определяет конфигурацию исследуемой гистограммы динамических нагрузок. Плотность распределения  $f_3(x)$  и функция распределения  $F_3(x)$  вероятностей в этом случае имеют вид

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x - x_0}{a^2} \exp \left( -\frac{(x - x_0)^2}{2a^2} \right) & \text{при } x \geq x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases}.$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left( -\frac{(x - x_0)^2}{a^2} \right) & \text{при } x \geq x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases}.$$

Для распределения Релея математическое ожидание  $m$ , дисперсия  $D$  и среднее квадратичное отклонение  $s$  зависят от параметра  $a$  и вычисляются по формулам:  $m = x_0 + a\sqrt{0,5\pi} = x_0 + 1,253 a$ ;  $D = 0,429 a^2$ ;

$s = 0,655 a$ . Вычислим параметры распределения Релея по данным гистограммы при  $m = 184,23$ ,

$$D = 3401,12. \text{ Тогда } a = 5,168; b = 0,309.$$

Проверяя функцию  $f_3(x)$  по критерию Пирсона, получим наблюдаемое значение  $\chi = 10,1 < 14,07$ . Следовательно, распределение Релея также может быть принято как теоретическое для данной гистограммы.

Находим плотность  $g_3(y)$  и функцию  $G_3(y)$  распределения случайной долговечности  $N$  для распределения Релея.

$$g_3(y) = \begin{cases} \frac{\psi(y) - x_0}{a^2} \exp\left(-\frac{(\psi(y) - x_0)^2}{2a^2}\right) |\psi'(y)| & \text{при } \psi(y) \geq x_0 \\ 0 & \text{при } \psi(y) < x_0 \end{cases},$$

$$G_3(y) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{(\psi(y) - x_0)^2}{2a^2}\right) & \text{при } \psi(y) \geq x_0 \\ 0 & \text{при } \psi(y) < x_0 \end{cases}.$$

Таким образом, из трех предложенных распределений каждое удовлетворяет в той или иной степени критерию Пирсона и может служить теоретической функцией для гистограммы динамических усилий на стыке рельсов. Проверим, будут ли существенными различия этих функций при прогнозировании усталостной долговечности.

С помощью функций распределения  $G_1(y)$ ,  $G_2(y)$ ,  $G_3(y)$  вычисляем вероятности попадания случайной долговечности  $N$  в интервалы  $(N_1, N_2)$ . Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2

Вероятность долговечности для различных видов  
распределения нагрузок

Виды теоретических распределений	Интервалы для числа циклов до разрушения				
	(04; $10^6$ )	( $10^6$ ; $2 \cdot 10^6$ )	( $2 \cdot 10^6$ ; $3 \cdot 10^6$ )	( $3 \cdot 10^6$ ; $4 \cdot 10^6$ )	( $4 \cdot 10^6$ ; $5 \cdot 10^6$ )
Нормальное распределение	0,598	0,195	0,071	0,035	0,021

Виды теоретических распределений	Интервалы для числа циклов до разрушения				
	(04; $10^6$ )	( $10^6$ ; $2 \cdot 10^6$ )	( $2 \cdot 10^6$ ; $3 \cdot 10^6$ )	( $3 \cdot 10^6$ ; $4 \cdot 10^6$ )	( $4 \cdot 10^6$ ; $5 \cdot 10^6$ )
Логарифмически нормальное распределение	0,544	0,248	0,098	0,016	0,024
Распределение Релея	0,502	0,233	0,104	0,056	0,034

Таким образом, приведенные в таблице 2 результаты показывают существенное влияние вида распределения на оценку вероятности усталостной долговечности. Следовательно, прогнозирование долговечности в ответственных случаях должно опираться на большой массив статистических данных. При выборе теоретического распределения нужно учитывать также моментные функции более высокого порядка.

Применение методов теории функций случайных величин при изучении кривых усталости дает возможность прогнозировать долговечность элементов конструкций. Разработаны методы учета влияния случайной амплитуды цикла и вида ее распределения на законы распределения случайной долговечности. Расчеты выполнены в системе MathCAD. Использованы статистические данные о динамических усилиях на стыках рельсов при движении вагона.

### Литература

1. Серенсен С. В. Сопротивление материалов усталостному и хрупкому разрушению. М. : Атомиздат, 1975. 192 с.
2. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. М. : Мир, 1969. 396 с.
3. Сабиров Р. Д. Движение колесной пары вагона по неравноупругому пути вдоль рельса // Транспорт Урала. 2009. № 4(23). С. 69–72. ISSN 1815-9400.
4. Евтух Е. С., Агапов Д. Г., Сакало В. И. Влияние просадки балласта на динамические усилия, возникающие между колесом и рельсом при прохождении стыка // Транспорт Урала. 2009. № 4(23). С. 32–34. ISSN 1815-9400.

Н. П. Чуев,

канд. физ.-мат. наук, Уральский государственный университет  
путей сообщения

## Некоторые вопросы теории ньютоновского потенциала в задачах динамики самогравитирующего газа

В настоящей работе рассматриваются вещественные вектор-функции точки  $\vec{x} = \{x, y, z\}$  вещественного евклидова пространства  $E_3$  и зависящие от времени  $t$ . Пусть  $Q_t$  – область пространства  $E_4: Q_t = \Omega_t \times (0, T)$ . Граница  $\Gamma_t$  области  $\Omega_t \subset E_3$  при  $t \in [0, T]$  принадлежит  $C^\infty$ . Данные функции исследуются в гильбертовом пространстве  $H$  вектор-функций  $\vec{U}(\vec{x}, t) = \{U(\vec{x}, t); V(\vec{x}, t); W(\vec{x}, t)\}$ , заданных в области  $\Omega_t$ , компоненты которых интегрируемы с квадратом [1], а область  $\Omega_t$  может совпадать со всем пространством  $E_3$ . Область  $\Omega_t$  является выпуклой односвязной областью. Скалярное произведение в  $H$  определим формулой

$$(\vec{U}, \vec{V}) = \iiint_{\Omega_t} \vec{U} \cdot \vec{V} d\tau = \iiint_{\Omega_t} (U_1 U_2 + V_1 V_2 + W_1 W_2) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned}\vec{U} &= U_1 \vec{i} + V_1 \vec{j} + W_1 \vec{k}; \\ \vec{V} &= U_2 \vec{i} + V_2 \vec{j} + W_2 \vec{k}, d\tau = dx dy dz.\end{aligned}$$

В дальнейшем будем использовать понятие «финитность». Дадим определение финитности в  $\Omega_t$ .

**Определение.** Функция  $f(\vec{x}, t)$  называется финитной в  $\Omega_t$ , если она равна нулю вне некоторой строго внутренней ограниченной подобласти  $\Omega_t$ . Вектор-функция  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  называется финитной в  $\Omega_t$ , если все ее компоненты являются функциями, финитными в  $\Omega_t$ .

Рассматриваемые вектор-функции гильбертова пространства  $H$ , заданные в области  $Q_t$ , являются гладкими функциями четырех переменных  $(x, y, z, t)$ . Эти функции могут быть как свободными

векторами пространства  $H$ , так и связанными между собой динамическими и физическими свойствами сплошной среды.

Так, например, множество функций  $\{\vec{u}(\vec{x},t), \vec{\rho}(\vec{x},t), \vec{F}(\vec{x},t)\}$  и их суперпозиции  $\vec{f}(\vec{x},t) = \vec{f}(\vec{u}, \vec{\rho}, \vec{F})$ , принадлежащие  $H$ , являются решениями системы газовой динамики [2], описывающей течения из энтропического самогравитирующего газа

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}, \\ \frac{d\rho}{dt} = -\text{div} \rho \vec{u}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\vec{u}(\vec{x},t) = \{u(\vec{x},t), v(\vec{x},t), w(\vec{x},t)\}$  – вектор скорости частиц газа;  $\rho(\vec{x},t)$  – плотность;  $p(\vec{x},t)$  – давление;  $\text{div}$  – оператор дивергенции.

Для системы (2) можно поставить задачу Коши с дополнительным условием, что функция плотности  $\rho = \rho(\vec{x},t)$  на границе  $\Gamma_t$  будет равна нулю, т.е.  $\rho|_{\Gamma_t} = 0$ .

Сила  $\vec{F}(\vec{x},t)$  с компонентами  $\{F_1, F_2, F_3\}$  – сила гравитации, которая выражается через ньютоновский потенциал  $\Phi(\vec{x},t)$

$$\vec{F} = \nabla \Phi, \quad (3)$$

где  $\nabla$  – оператор градиента функции  $\Phi$ , удовлетворяющей уравнению Пуассона;

$$\Delta \Phi = -4\pi G \rho, \quad (4)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $G$  – гравитационная постоянная.

Гравитационный потенциал  $\Phi(\vec{x},t)$  равен

$$\Phi(x,t) = G \iiint_{\Omega_t} \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}', \quad (5)$$

где  $|\vec{x} - \vec{x}'|$  – расстояние между двумя точками переменной области  $\Omega_t$ .

Функция  $\Phi(\vec{x},t)$  (5) определена в  $E_4$ , заключающей в себе конечный объем газа; является решением уравнения Пуассона (4) внутри области  $\Omega_t$ . В остальной части пространства, где  $\rho(\vec{x},t) = 0$ ,  $\Phi(\vec{x},t)$ , представляет решение уравнения Лапласа



$$\Delta\Phi = 0, \quad (6)$$

причем  $\Phi|_{\infty} = O\left(\frac{1}{r}\right)$ .

В теории ньютоновского потенциала [3, 4] доказывается, что ньютоновский потенциал (5) дает единственное решение уравнения (4), обращающееся на бесконечности в нуль. Подчеркнем, что решение (5) уравнения (4) удовлетворяет условию

$$\Phi(\vec{x}, t) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Сделаем еще одно замечание об области  $\Omega_i \subset E_3$ . Главная ее особенность состоит в том, что область  $\Omega_i(\vec{x})$  заранее неизвестна, и ее граница  $\Gamma_i$  является свободной. Если искать уравнение свободной границы в виде  $f(\vec{x}, t) = 0$ , то будет выполняться условие

$$\frac{df}{dt} = f_t + \nabla f \cdot \vec{u} = 0. \quad (8)$$

Это замечание об области  $\Omega_i(\vec{x})$  как о переменной области со свободной границей  $\Gamma_i$  будет использоваться в дальнейшем.

В математической физике широко используется важнейшая теорема, известная в векторном анализе как теорема векторного анализа Гельмгольца [5] об ортогональном разложении (расщеплении) гладкого векторного поля  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  в области  $E_3$  на два: потенциальное  $u_1(\vec{x}, t) \in G$  и соленоидальное  $\vec{u}_2(\vec{x}, t) \in F$ .

Основополагающей в этом направлении является работа Г. Вейля [6], опубликованная в середине прошлого столетия. Для решения проблем динамики жидкости метод ортогональных проекций развивался выдающимися учеными: С. Л. Соболевым [7], О. А. Ладыженской [8], Э. Б. Быховским, Н. В. Смирновым [9] и др.

В работе [10] для функций бесконечно дифференцируемых, убывающих на бесконечности как  $r^{-2}$  с первыми производными, убывающими как  $r^{-3}$ , доказана теорема С. Л. Соболева.

**Теорема Соболева.** *Гильбертово пространство  $H$  вектор-функций  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  допускает представление*

$$H(E_3) = G(E_3) \oplus F(E_3), \quad (9)$$

где знак  $\oplus$  обозначает прямую сумму подпространств  $G$  и  $F$ .

Используя результаты, доказанные в приведенной выше теореме, рассмотрим финитные бесконечно дифференцируемые функции в  $Q_t$  при фиксированном  $t \in [0, T]: \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{u}(\vec{x}, t); \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{F}(\vec{x}, t)$  и гладкую функцию  $p(\vec{x}, t)$  в  $E_4$ .

Разложим вектор-функцию  $\rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{u}(\vec{x}, t)$  на градиентную и соленоидальную части, соответствующие (9)

$$\rho \vec{u} = \vec{V} + \text{grad} p. \quad (10)$$

Определим  $\vec{V}(\vec{x}, t)$  так, чтобы выполнялись равенства

$$\text{div} \vec{V} = 0 \text{ в } \Omega_t, \quad (11)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \Gamma_t. \quad (12)$$

С этой целью выберем векторное поле  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  бесконечно дифференцируемых и равных нулю на  $\Gamma_t$  вектор-функций. Определим на границе  $\Gamma_t$  произвольный контур  $L \subset \Gamma_t$  и рассмотрим интеграл

$$\oint_L \vec{A}(\vec{x}, t) d\vec{r} = \iint_{\sigma_t \subset \Gamma_t} \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} d\tau = 0$$

в любой окрестности любой точки  $x \in \Gamma_t$ .

В силу произвольности  $\sigma_t \subset \Gamma_t$  получим

$$\text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} \big|_{\Gamma_t} = 0. \quad (13)$$

Взяв в качестве  $\vec{V}(\vec{x}, t) = \text{rot} \vec{A}$ , получим выполнение условий (11) и (12).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений газовой динамики (2). Предположим, что существуют гладкие функции  $\rho(\vec{x}, t), \vec{u}(\vec{x}, t), \vec{F}(\vec{x}, t)$ , удовлетворяющие этой системе. Пусть  $\vec{A} = \rho \cdot \vec{F}$ ; составим (10), где  $p(\vec{x}, t)$  — неизвестная функция (не связанная с давлением газа в системе (2))

$$4\pi G \rho \vec{u} = \text{grad} p + \text{rot} \rho \vec{F}. \quad (14)$$

Функции  $\rho \vec{u}, \rho \vec{F}$  для  $\vec{x} \in \Gamma_t$  равны нулю, тогда из (13) следует

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma_t} = 0. \quad (15)$$

Зададим условия для  $p(\vec{x}, t) = 0$  на бесконечности. Вычислим от обеих частей (14) оператор  $\operatorname{div}$ , учитывая, что  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ , получим

$$\Delta p = 4\pi G \operatorname{div}(\rho \vec{u}), \quad (16)$$

при

$$p \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} = 0. \quad (17)$$

Уравнение Пуассона (16) при условии (17) имеет единственное решение [2, 3]

$$p(\vec{x}, t) = -G \iiint_{E_3} \frac{\operatorname{div} \rho \vec{u}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\tau = -G \iiint_{\Omega_t} \frac{\operatorname{div} \rho \vec{u}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\tau. \quad (18)$$

Используя из системы (2) последнее уравнение, формулу (18) перепишем в виде

$$p(\vec{x}, t) = G \iiint_{\Omega_t} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\tau = G \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_t} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\tau \quad (19)$$

при условии, что  $\rho(\vec{x}, t) \Big|_{\Gamma_t} = 0$ .

В равенстве (19) последний интеграл по области  $\Omega_t$  есть частная производная по  $t$  ньютоновского потенциала

$$\Phi(\vec{x}, t) = G \iiint_{\Omega_t} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\tau.$$

Таким образом, окончательно получаем равенство

$$4\pi G \rho \vec{u} = \nabla \Phi_t + \operatorname{rot} \vec{F},$$

или, учитывая (3), для неизвестной вектор-функции  $\vec{F}$  получим уравнение с частными производными первого порядка

$$\vec{F}_t = 4\pi G \rho \vec{u} - \operatorname{rot} \vec{F}. \quad (20)$$

Простой проверкой можно убедиться, что равенство (20) будет справедливо, если вместо вектор-функции  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  взять  $\rho\vec{u}$  и вообще произвольную вектор-функцию  $f(\vec{x}, t)$ , удовлетворяющую условию (13).

Докажем единственность представления функции  $4\pi G\rho\vec{u}$  в виде (20).

Используя ортогональность  $\vec{F}_i$  и  $\text{rotp}\vec{F}$ , предположим, что существуют для функции  $4\pi G\rho\vec{u}$  два разложения в виде (20)

$$4\pi G\rho\vec{u} = \vec{V}_1 + \text{grad}p_1,$$

$$4\pi G\rho\vec{u} = \vec{V}_2 + \text{grad}p_2.$$

Тогда

$$0 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \cdot \text{grad}(p_1 - p_2). \quad (21)$$

Умножим левую и правую части (21) на  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ , получим, вычислив скалярное произведение на  $\Omega_i$ ,

$$0 = \iiint_{\Omega_i} (|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 + (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot \text{grad}(p_1 - p_2)) d\Omega.$$

Ортогональность  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$  и  $\text{grad}(p_1 - p_2)$  приводит к равенству

$$\iiint_{\Omega_i} |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 d\Omega = 0,$$

отсюда  $|\vec{V}_1 - \vec{V}_2| = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2$ . Кроме этого получим  $\text{grad}p_1 = \text{grad}p_2$ , или

$$p_1 = p_2 + \text{const.}$$

Если  $p_1 = p_2 = 0$  при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , то и  $p_1 = p_2$  в  $\Omega_i$ .

Единственность разложения доказана.

В заключение обратим внимание на интересное свойство функции  $\vec{F}_i$ . Если в (20) обе части равенства умножить на  $\vec{n}$ , то в силу  $\rho\vec{u}\vec{n}|_{\Gamma_i} = 0$ ,  $\text{rotp}\vec{F} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_i} = 0$  следует, что и

$$\vec{F}_i \cdot \vec{n}|_{\Gamma_i} = 0, \quad (22)$$

то есть силовая функция  $\vec{F}_i$  направлена по касательной к поверхности  $\Gamma_i$ .

**Замечание.** Справедливость (22) следует из (15) и (20), однако в этом можно убедиться, рассмотрев интеграл по произвольной области  $\sigma_t$   $\Gamma_t$

$$I = \iint_{\sigma_t} \vec{F}_t \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_t} \left( G \nabla \iiint_{\Omega_t} \frac{\operatorname{div} \rho \vec{u}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\tau \right) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Интегрирование по области  $\Omega_t$  осуществляется по переменной  $\vec{x}'$ , а по поверхности  $\sigma_t$  — по переменной  $\vec{x}$ . По теореме Фубини данный интеграл запишется в виде

$$I = G \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \rho \vec{u} \iint_{\sigma_t} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma d\tau, \quad (23)$$

где  $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$ .

В равенстве (23) поверхностный интеграл есть известный интеграл Гаусса, связанный с измерением телесных углов поверхностей, хорошо изученный в теории ньютоновского потенциала. Интеграл Гаусса есть непрерывная функция по переменной  $\vec{x}'$  в замкнутой области  $\Omega_t$ , где принимает для каждого  $\vec{x}'$  ограниченные постоянные значения. Обозначим при фиксированном значении  $t$

$$f(\vec{x}') = \iint_{\sigma_t} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau,$$

тогда по теореме о среднем для кратного интеграла [11]

$$\iiint_{\Omega_t} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) f(\vec{x}') d\tau = f(Q) \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) d\tau = f(Q) \iint_{\Gamma_t} \rho \vec{u} \vec{n} d\tau = 0.$$

Здесь  $Q$  — некоторая точка  $\Omega_t$ ,  $f(Q) = \operatorname{const}$ . Таким образом, интеграл равен нулю. В силу произвольности  $\sigma_t$  следует справедливость (22).

## Литература

1. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Физмалит, 2002, 488 с. 5-9221-0272-9.
2. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с. ISBN 5-93972-201-6.

3. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гостехиздат, 1953. 415 с.
4. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала, М.-Л. : ОГИЗ, 1946. 318 с.
5. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М. : Изд-во «Наука», 1965. 427 с.
6. Weyl H. (Г. Вейль) The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. Journal, 7 (1940). Pp. 411–444.
7. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики / Изв. АН СССР. Сер. : Матем., 18(1954). С. 3–50; Соболев С. Л. Избранные труды : Т. 1. Изд-во Института математики СО РАН, 2003. 692 с.
8. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Изд-во «Наука», 1970, 288 с.
9. Быховский Э.Б, Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций квадратично суммируемых по заданной области, и операторов векторного анализа. Тр. МИАН СССР, 1960. Т. 59. С. 5–36.
10. Чуев Н.П. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций в теории ньютоновского потенциала// Вестник УРГУПС, №2 (26). 2015. С. 4–12. ISBN 2079-0392.
11. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. II; М. : Изд-во «Наука», 1983. 448 с.

## Раздел 2

# Методический аспект преподавания в вузе математических дисциплин

---

УДК 372.851 : 51:37

**М. Д. Боярский**

Уральский государственный экономический университет,

**П. И. Гниломедов**

Уральский государственный университет путей сообщения

## Коррекция содержания курса математики в условиях оптимизации учебного процесса

**В** настоящее время значительно расширился круг лиц, получающих высшее образование. Поэтому возникает необходимость рассмотрения проблем, связанных с оптимизацией учебного процесса по математическим дисциплинам. В настоящей работе мы остановимся на одной из проблем, которая, как нам представляется исходя из многолетнего педагогического опыта, является сейчас, как и ранее, краеугольной точкой математического образования в вузе.

Речь идет о проблеме актуализации знаний студентов по математике.

В той или иной мере снижение качества освоения большинством обучающихся нового материала по математике проявляется по-разному: недостаточный уровень сформированности понятийного аппарата (форма и объем понятий) и, как следствие, значительные затруднения в выявлении понятийных отношений (использование одних понятий для раскрытия содержания новых, решение задач и освоение способов их решения и т.д.).

Для студентов, освоивших материал средней школы лишь на уровне воспроизведения понятий и приемов решения простейших математических задач, характерны трудности в освоении способов мыслительной деятельности (анализ, синтез). Кроме того, здесь же можно

отметить слабую сформированность умений, способствующих учебной деятельности во всех ее видах.

Для более подготовленных студентов основной причиной снижения качества освоения нового математического аппарата можно указать недостаток времени на освоение этого аппарата. Особенно это проявляется на второй год обучения, когда количество аудиторных часов уменьшается, а это ведет еще и к тому, что увеличивается временной разрыв между ранее освоенными знаниями и изучаемыми в данный момент.

Как следствие, при изучении новых естественнонаучных и математических понятий преподаватель должен представить и изложить новый материал так, чтобы, с одной стороны, освоение происходило на необходимом уровне сложности, а, с другой, новые понятия были изложены на научном языке, с использованием четких научных определений.

Один из способов решения этой проблемы — актуализация знаний (собственно имеющихся математических; актуализация имеющегося практического опыта, не обязательно связанного с естественнонаучными понятиями; актуализации и того и другого).

Следует решить, какие разделы должен содержать курс математики, в какой последовательности эти разделы лучше излагать. Традиционные фундаментальные разделы математики как учебной дисциплины — алгебра, геометрия и математический анализ. Опыт показывает, что последовательность изложения фундаментальных разделов не оказывает существенного влияния на вопросы актуализации математических знаний: можно начинать с алгебры или геометрии, можно начинать с математического анализа — проблемы будут одинаковы. Гораздо важнее выстроить темы внутри фундаментальных разделов.

Возьмем фундаментальный раздел «Математический анализ». Этот раздел включает ряд подразделов: пределы, производные, интегралы, дифференциальные уравнения, ряды, функции нескольких переменных. С логико-математической точки зрения указанные подразделы можно изучать в той последовательности, в какой они приведены выше: все необходимые факты к нужному моменту уже будут установлены. Однако логика научного познания не всегда тождественна логике дидактики. Логика дидактики должна учитывать проблемы, возникающие в ходе реального изучения курса математики, в реальном учебном процессе, с реальными студентами. А реальные студенты склонны забывать материал. С логико-математической точки зрения такое невозможно: если что-то ранее доказа-



но, значит, это уже известно, и в любой момент может быть использовано. Однако если студенты фактически забыли какие-то понятия, теоремы или формулы, то в данный нужный момент возникает ситуация «неизвестности», «незнания», и объективно логически безупречные построения становятся субъективно непонятными и недопустимыми.

Например, введение частных производных много позже обычных производных, как показывает опыт, приводит к значительным трудностям: забываются правила и формулы дифференцирования, а часто — и сам смысл производной как скорости изменения функции. В результате задания типа «найти частную производную по переменной  $x$  выражения  $y^2 \sin x$ ;  $3y^3 + x$ » и т.п. ставят значительную часть студентов в тупик. Приходится объяснять, что частная производная — это, прежде всего, производная, и для ее вычисления никакие дополнительные формулы не нужны. Уровень понимания (непонимания) хорошо иллюстрируют ответы на вопросы: что такое частная производная? чему равна частная производная? Таким образом, следует признать, что удаленное расположение тем «Производные» и «Частные производные» вызывает необходимость актуализации значительного числа важнейших понятий и фактов. Зачастую приходится практически заново рассказывать тему «Производные». А это уже не объективно необходимая актуализация, а дидактическая катастрофа. Актуализация математических знаний в ходе изучения курса неизбежна, это часть дидактического процесса. Но когда актуализация вынужденно подменяется повторным изложением, это недопустимо.

Как избежать столь крайней ситуации? Поскольку актуализация как важный методический фактор неизбежна, следует заранее планировать в содержании специальные «актуализационные» элементы — дидактические связки между сопряженными темами. В частности, следует тщательно подбирать примеры.

**Пример 1.** Дана функция переменной  $x$ :  $f(x) = a^2 \sin x$ , где  $a$  — некоторая константа. Найти  $f'(x)$ .

Наличие в памяти такого рода примеров позволяет, как показывает опыт, гораздо эффективнее работать с понятием «частная производная». Можно пойти и по другому пути — попробовать сблизить темы: после изучения производной ввести понятие «частная производная», при этом подраздел «Функции нескольких переменных» в целом может быть изложен позднее (после интегралов и пр.).

Приведем еще пример дидактических затруднений, вызванных забыванием. Подраздел «Ряды» опирается на подраздел «Пределы».

Но временной интервал между этими дидактическими единицами обычно бывает значительным. Мы провели эксперимент: рассмотрели числовые ряды непосредственно после предела последовательности. Заметим, что почти все признаки сходимости (кроме интегрального) основаны исключительно на свойствах пределов. В результате эксперимента выяснилось, что задачи на исследование сходимости числовых рядов решаются значительно успешнее, чем при традиционном изложении. Пределы числовых последовательностей и суммы рядов — понятия сопряженные, очень важные для понимания сути бесконечности как математической абстракции. И рассмотрение этих вопросов «в одном пакете» дидактически вполне целесообразно, а разрывать по времени ошибочно. Таково наше мнение. Что касается степенных и тригонометрических рядов, то эти темы можно рассмотреть позднее, т. к. дидактическая связка в виде числовых рядов уже построена.

Отсутствие дидактически связующих элементов в сопряженных темах является основной причиной полного «забывания» материала.

**Пример 2.** Важнейшее понятие «экстремум» разбивается, а точнее сказать, разрывается на части: экстремум функции одной переменной, экстремум функции двух переменных и т. д. Сначала определяют экстремум функции одной переменной  $f(x)$  и дают достаточные условия:

$$f'(x_0) = 0, f'(x) \text{ меняет знак в точке } x_0. \quad (1)$$

Затем «линия экстремумов» прерывается и возникает при рассмотрении второй производной:

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0. \quad (2)$$

Спустя еще немало времени определяют экстремум функции двух переменных и получают условия:

$$f'_x(M_0) = 0, f'_y(M_0) = 0, AC - B^2 > 0. \quad (3)$$

Далее рассматривается экстремум функции трех и более переменных; условия усложняются. Вместо содержательно-методической линии «экстремумы» имеем набор отрезков. При таком изложении очень трудно актуализировать знания, нет стержневой идеи, только отдельные факты. Именно так студенты воспринимают экстремумы, не видя связи между экстремумами функции одной переменной, экстремумами функции двух переменных и т. д., между условиями (1),

(2) и (3), тем более что из-за нехватки времени доказательства часто опускаются. Какова общая идея условий экстремума? Она следующая. Разность  $f(M) - f(M_0)$  в окрестности точки экстремума имеет постоянный знак. Скажем,  $f(M) - f(M_0) > 0$  для минимума. Эта разность представляется так:

$$f(M) - f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2}d^2f(M_0) + \dots \quad (4)$$

При условии  $df(M_0) = 0$  знак разности (4) определяется знаком второго дифференциала  $d^2f(M_0)$ . Вот это – основное. Остальное – технические вопросы. Условие  $df(M_0) = 0$  означает  $\text{grad } f(M_0) = 0$ , т. е.  $f'_x(M_0) = 0, f'_y(M_0) = 0, \dots$  для функции двух и более переменных;  $f'(x_0) = 0$  для функции одной переменной. Условие  $d^2f(M_0) > 0$  означает положительную определенность матрицы Гессе, состоящей из значений вторых производных для случая двух и более переменных, и положительность значения второй производной для случая одной переменной.

Приведенные рассуждения принципиально важны и обязательно должны быть доведены до студентов. Иначе, т.е. по частям, материал быстро забудется. Заметим, что условия (1) также вписываются в приведенную схему, но лишь для функции одной переменной. Аналогов им для функций двух и более переменных нет.

**Пример 3.** Кроме общей идеи, на практике весьма важны конкретные детали представления учебного материала. Поясним это на примере изложения вопросов, касающихся экстремума, монотонности, перегиба, выпуклости и графиков функции одной переменной.

Рассмотрим пример учебной ситуации, иллюстрирующий не только приемы актуализации имеющихся естественнонаучных знаний и практического опыта, но и позволяющей корректировать построение содержательно-методической линии изучаемого материала в пределах одного раздела.

При изучении темы «Экстремумы функции» наряду с первым достаточным признаком экстремума: равенство нулю производной в точке экстремума  $f'(x_0) = 0$  и смена знака производной при переходе через точку экстремума, который часто позиционируется как основной, рассматривается второй достаточный признак экстремума функции. Приведем стандартную формулировку этого признака.

Если в точке  $x_0$  первая производная функции  $f(x)$  равна нулю ( $f'(x_0) = 0$ ), а вторая производная в этой точке существует и отлична

от нуля ( $f''(x_0) \neq 0$ ), то при  $f''(x_0) < 0$  в точке  $x_0$  функция имеет максимум, а минимум — при  $f''(x_0) > 0$ .

Обычно второй достаточный признак рассматривается сразу же после первого достаточного признака как дополнительный [1–3 и др.], и доказательство часто, если позволяет учебное время, приводится в формальном аналитическом виде, если же времени не хватает, то приходится обходиться без доказательства. Это приводит к вполне естественным трудностям в понимании данного материала у студентов, ранее освоивших метод определения экстремума функции с использованием первого достаточного признака.

Дело в том, что многие обучающиеся часто путаются в соответствии знака второй производной и характера экстремума. Это можно объяснить тем, что интуитивно понятие «максимум» ассоциируется с увеличением некоторой величины и по аналогии — с признаком возрастания функции на интервале ( $f'(x) > 0$ ) во втором достаточном признаке экстремума, обучающиеся ошибочно определяют знак второй производной в точке экстремума положительным:  $f''(x_0) > 0$ . Понятно, что аналогичная ошибка допускается и для минимума функции, когда существенный признак убывания функции — отрицательное значение первой производной на интервале ( $f'(x) < 0$ ), — ассоциативно переносится на условие минимума в точке во втором достаточном признаке:  $f''(x_0) < 0$ .

Обратим внимание на то, что аналогичный перенос существенных признаков возрастания и убывания функции, который определен знаком производной и ассоциируется с символами «>» или «<» (больше или меньше), приводит к ошибке определения характера выпуклости графика функции при изучении темы «Выпуклость графика функции. Точки перегиба». В частности, положительный знак второй производной на некотором интервале  $f''(x) > 0$  обучающиеся ошибочно связывают с выпуклостью вверх и наоборот отрицательное значение второй производной  $f''(x_0) < 0$  — с выпуклостью вниз.

В дальнейшем большинство обучающихся, осознав ошибку при определении соответствий знака второй производной условию экстремума (максимума или минимума), механически запоминают правильный вариант признака, но при этом стараются избегать применения второго достаточного признака даже в тех примерах, в которых его использование было бы предпочтительнее. В результате через некоторое время условия второго достаточного признака забываются.

Казалось бы, при необходимости можно ограничиться первым достаточным признаком экстремума, который обучающиеся осваи-

вают вполне качественно, поскольку знакомятся с ним в курсе математики средней школы. Однако впоследствии формальное освоение условий второго достаточного признака экстремума функции одной переменной ведет к трудностям в понимании достаточного признака экстремума функции двух переменных, который определяется через частные производные второго порядка.

Каким же образом можно разрешить, описанную выше методическую проблему — эффективно раскрыть понятийное содержание, исключить смешение существенных признаков в рассмотренных примерах и обеспечить осознанное качественное освоение как условий экстремума функции во втором достаточном признаке, так и условий, определяющих характер выпуклости графика функции на некотором интервале?

На наш взгляд, решение такой достаточно сложной методической задачи можно вполне осуществить, актуализируя как имеющиеся математические знания и естественнонаучные понятия, так и имеющийся практический опыт, не обязательно напрямую связанный с естественнонаучными понятиями.

Обозначим исходное состояние обучающегося и выделим те факты, представления и понятия, которые им освоены и о которых он может судить на основании своего практического опыта.

Прежде всего это наглядное представление графика функции, характера его выпуклости в точке экстремума: в точке максимума выпуклость графика функции направлена вверх, в точке минимума, соответственно, — вниз. Заметим, что понятие производной и ее геометрическая интерпретация как тангенса угла наклона касательной к графику функции в некоторой точке изучаются еще в курсе средней школы, поэтому можно принять, что имеющиеся математические знания позволяют обучающемуся судить о горизонтальном положении касательной к графику функции в точке экстремума ( $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , где  $\alpha$  — угол наклона касательной) (рис. 1).

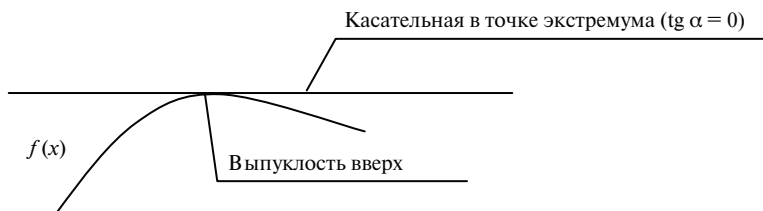


Рис. 1

Кроме того, обучающимся безусловно знакомо естественнонаучное понятие ускорения и его математическая аналогия в виде второй производной координаты (переменной  $x$ ) по времени. Здесь можно отметить, что собственный практический опыт и имеющееся представление обучающегося, что ускорение имеет отрицательное значение при уменьшении скорости, позволяет вполне качественно сформировать смысловую взаимосвязь: при въезде в гору скорость движения тела уменьшается, следовательно, ускорение, а потому и вторая производная координаты по времени имеет отрицательный знак (рис. 2).

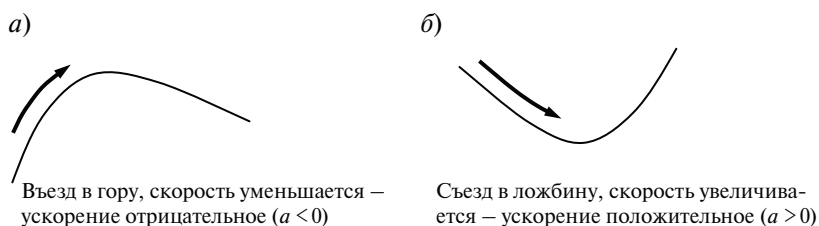


Рис. 2

$a$  — выпуклость вверх ( $x''(t) < 0$ );  
 $б$  — выпуклость вниз ( $x''(t) > 0$ )

Перечисленные исходные факты позволяют определить способ решения методической задачи качественного освоения обучающимися как техники определения характера выпуклости графика функции, так и условий второго достаточного признака ее экстремума. Содержание и порядок методической работы преподавателя, на наш взгляд, таковы: первоначально необходимо подвести обучающихся к мысли, что в точке экстремума функции, например, максимума, выполняются два условия — график функции должен иметь выпуклость вверх, и при этом касательная к графику должна быть расположена горизонтально (параллельно оси  $Ox$ ). В соответствии с рассмотренными ранее примерами, первое условие определяется отрицательным знаком второй производной, а второе — равенством нулю первой производной (рис. 3).

Описанные приемы позволяют обоснованно выстроить содержательно-методическую линию освоения в рамках раздела «Исследование функции. Построение графиков», которая, на наш взгляд, в наиболее продуктивном варианте представляет собой первоначальное

освоение обучающимися понятий и методов, определяющих выпуклость графика, а затем, на основе имеющихся геометрических интерпретаций производной и знаний условий необходимого признака экстремума, формирование представления о втором достаточном признаке экстремума функции.

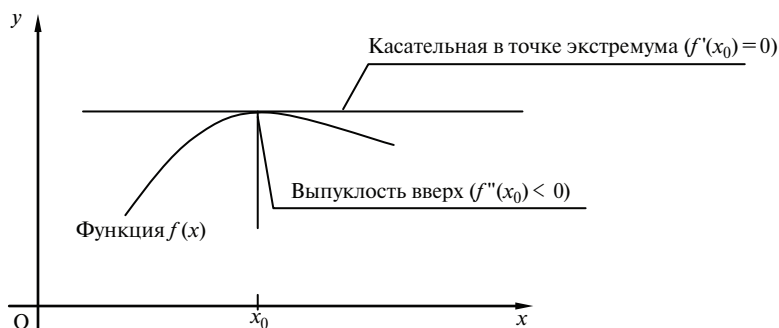


Рис. 3

## Литература

1. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : ЮНИТИ, 2004. — 471 с. ISBN 5-238-00030-8.
2. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — 9-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2009. — 608 с. ISBN 978-5-8112-3775-3.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студентов вузов. В 2-х ч. Ч. I. — 4-е изд., испр. и доп. — М. : Высш. шк., 1986. — 304 с.

УДК 519.813

**В. В. Башуров,**

канд. физ.-мат. наук,

**О. А. Башурова, Н. О. Борисова**

Уральский государственный университет путей сообщения

## О некоторых особенностях и закономерностях математической олимпиады УрГУПС 2015 года

Ежегодно в УрГУПС проходит студенческая математическая олимпиада. В 2015 году олимпиада стала межвузовской: в ней приняла участие и команда УрГЭУ. Жюри олимпиады оценивает итоги и проводит анализ результатов для планирования дальнейшей работы. Ранее были проведены статистические исследования набранных баллов на теоретическую закономерность (установлены теоретические законы распределения) [1]. Также проведено сравнение присуждения баллов за решенные задачи со способами начисления в других математических олимпиадах [2]. В настоящей работе на примере результатов 2015 года сопоставлена начисленная сложность задач и количество команд, решивших и решавших предложенные задачи.

Проведём корреляционный и тематический анализ олимпиад первого и второго курсов.

В олимпиаде первого курса участвовали 52 команды, результаты решения задач представлены в таблице 1.

*Таблица 1*

Номер задачи	Балл, кол-во	Число команд I курса, решивших задачу правильно	Число команд I курса, набравших хотя бы 50 % баллов за задачу	Число команд I курса, набравших хотя бы балл за задачу
1	4	4	13	17
2	6	6	8	10
3	5	1	4	13
4	6	11	14	18
5	4	9	11	18
6	8	3	13	29



Окончание табл. 1

Номер задачи	Балл, кол-во	Число команд I курса, решивших задачу правильно	Число команд I курса, набравших хотя бы 50 % баллов за задачу	Число команд I курса, набравших хотя бы балл за задачу
7	10	0	0	8
8	5	15	19	29
9	7	0	1	20
10	5	11	22	26

Суммарное число баллов за все задачи равно 60. Оценим относительный вес каждой задачи. Для этого количество баллов разделим на суммарное число баллов. Введём следующие обозначения:  $X$  – относительный вес задачи;  $Y_1$  – число команд первого курса, решивших задачу правильно;  $Y_2$  – число команд первого курса, набравших хотя бы 50 % баллов за задачу;  $Y_3$  – число команд первого курса, набравших хотя бы балл за задачу. Составим корреляционную таблицу между весами задач и количеством команд (таблица 2).

Таблица 2

$X$	0,067	0,1	0,083	0,1	0,067	0,133	0,167	0,083	0,117	0,083
$Y_1$	4	6	1	11	9	3	0	15	0	11
$Y_2$	13	8	4	14	11	13	0	19	11	22
$Y_3$	17	10	13	18	18	29	8	29	20	26

Вычислим коэффициенты корреляции в трех статистических зависимостях [3]. В зависимости  $XY_1$  коэффициент корреляции  $r_1 = -0,525$ ; в зависимости  $XY_2$  коэффициент корреляции  $r_2 = -0,533$ ; в зависимости  $XY_3$  коэффициент корреляции  $r_3 = -0,228$ . Проверим нулевые гипотезы о значимости коэффициента корреляции [3]: наблюдаемые абсолютные значения критерия Стьюдента при проверке равны, соответственно,  $T_1 = 1,747$ ,  $T_2 = 1,783$ ,  $T_3 = 0,646$ . Критическое значение при уровне значимости  $\alpha = 0,005$  принимает значение  $T = 2,31$ , что говорит о слабой корреляции в первых двух зависимостях.

Проведём аналогичный анализ для олимпиады второго курса. В олимпиаде второго курса участвовала 41 команда; результаты решения задач представлены в таблице 3.

Таблица 3

Номер задачи	Балл, кол-во	Число команд II курса, решивших задачу правильно	Число команд II курса, набравших хотя бы 50 % баллов за задачу	Число команд II курса, набравших хотя бы балл за задачу
1	6	8	10	15
2	4	14	18	19
3	6	2	3	13
4	6	0	1	6
5	5	2	6	22
6	5	10	10	15
7	5	26	27	30
8	9	2	2	5
9	6	6	9	18
10	8	1	6	30

Составим корреляционную таблицу 4. Введём аналогичные обозначения: параметр  $X$  — относительный вес задачи, равный отношению количества баллов за задачу к общему числу баллов за все предложенные задачи (для второго курса общая сумма — тоже 60 баллов); параметр  $Z_1$  — число команд первого курса, решивших задачу правильно;  $Z_2$  — число команд первого курса, набравших хотя бы 50 % баллов за задачу;  $Z_3$  — число команд первого курса, набравших хотя бы балл за задачу (таблица 4).

Таблица 4

$X$	0,1	0,067	0,1	0,1	0,083	0,083	0,083	0,15	0,1	0,133
$Z_1$	8	14	2	0	2	10	26	2	6	1
$Z_2$	10	18	3	1	6	10	27	2	9	6
$Z_3$	15	19	13	6	22	15	30	5	18	30

Для зависимости  $XZ_1$  коэффициент корреляции равен  $r_1 = -0,542$ ; для зависимости  $XZ_2$  —  $r_2 = -0,570$ ; для зависимости  $XZ_3$  —  $r_3 = -0,228$ . Абсолютные величины наблюдаемых значений критерия Стьюдента при проверке нулевых гипотез о значимости коэффициента корреляции равны, соответственно,  $T_1 = 1,826$ ,  $T_2 = 1,960$ ,  $T_3 = 0,768$  [3]. Критическое значение при уровне значимости  $\alpha = 0,005$  равно  $T = 2,31$ , что также говорит о слабой корреляции в первых двух зависимостях.

Результаты анализа олимпиад первого и второго курсов близки. Студенты не обращают внимания на количество баллов задачи при решении, особенно команды, набравшие по одному баллу за некоторое разумное зерно в решении. Жюри для несложной, но интересной для студентов задачи, может выставить высокие баллы.

Если объединить результаты олимпиады первого и второго курсов, то полученные коэффициенты корреляции для первых двух зависимостей будут значимыми.

### Тематический анализ

Проанализируем, какие задачи вызвали наибольшие затруднения у студентов. Рассмотрим вариант билета для первого курса.

Задача	Условие задачи	Балл, кол-во
1	Определите соответствие между переменными $x$ и $y$ , если известно, что $X^{2015} = X$ , где $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ , $x, y \in R$ ; $i, y \neq 0$	4
2	Треугольник $ABC$ и точка $O$ таковы, что $3 \cdot \vec{OA} + 2 \cdot \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ . Во сколько раз площадь $\Delta ABC$ больше площади $\Delta AOB$ ?	6
3	Окружность $x^2 + y^2 + 2x - 36 = 0$ в точках $A$ и $B$ пересекает параболу $y^2 = 2px$ . Найти параметр $p$ , если треугольник $OAB$ правильный (точка $O$ — начало координат)	5
4	При каких значениях $a$ и $b$ выполняется равенство $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + ax + b} = 1$ ?	6
5	Найти $f^{(2015)}(\pi)$ , если $f(x) = x \cdot \cos x$	4
6	Найти точку минимума функции $f(x) = \sqrt{(x-3)^3 + (2x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + 4x^2}$ .	8
7	Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 4 \sin 3x \cdot \cos y + 5 \sin 3x \cdot \sin y + \sqrt{23} \cdot \cos 3x$	10
8	Какое из двух чисел больше: $2014^{2016} \cdot 2016^{2014}$ или $2015^{2 \cdot 2015}$ ?	5
9	Верно ли, что неравенство $2 \cdot \sqrt{a} + 3 \cdot \sqrt[3]{b} \geq 5 \cdot \sqrt[5]{ab}$ выполняется при всех $a > 0$ , $b > 0$ ?	7
10	На окружности отмечено восемь различных точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в этих точках?	5

Задачи 7 и 9 оказались студентам не по силам. При этом задача 7 является школьным заданием повышенной сложности на знание методов группировки тригонометрических выражений с целью приведения к синусу или косинусу суммы углов. Эту задачу можно было решить методами математического анализа с помощью вычисления экстремумов функции двух переменных, но для первого курса эта тема еще впереди.

Задача 9, с одной стороны, имеет сложное и интересное решение через исследование функции с использованием производной, с другой, её можно решить в два действия, используя классические каноны математики. В первом случае выполним последовательно замены  $x = \sqrt[10]{a}, y = \sqrt[15]{b}$  и  $t = \frac{x}{y}$  и приходим к рассмотрению функции

$g(x) = 2t^5 - 5t^2 + 3$ , которая имеет минимум при  $t = 1$  на интервале  $(0; +\infty)$  и  $g(1) = 0$ . Следовательно, при  $t \geq 0$  имеем  $g(t) \geq 0$ , что влечет за собой доказательство исходного неравенства.

Второй способ основывается на теореме Коши, из которой возьмем только один вывод: среднее арифметическое неотрицательных чисел всегда не меньше среднего геометрического, что и доказывает неравенство.

Приятной неожиданностью стала задача 6, предложенная канд. физ.-мат. наук В. Л. Розенбергом. Сам Валерий Львович предложил оригинальное решение, связанное с заменой  $y = 2x$  у вторых слагаемых подкоренных выражений, и затем — определением точки пересечения отрезка, соединяющего центры двух окружностей, с прямой  $y = 2x$ . Студенты пошли классическим путем: взяли производную и решали иррациональное уравнение. В результате кропотливый труд привел их к решению квадратного уравнения  $65x^2 + 76x + 12 = 0$ , средн корней которого и находится точка минимума функции.

Жюри было досадно, что многие команды не смогли осилить задачи на применение стандартных алгоритмов, изученных в первом семестре: возведение квадратной матрицы второго порядка с двумя нулевыми элементами в  $n$ -ю степень (задача 1) или вычисление 2015-й производной функции  $y(x) = x \cdot \cos(x)$  в точке  $x = \pi$  (задача 5).

На втором курсе был предложен следующий вариант.

Задача	Условие задачи	Балл, кол-во
1	Известно, что человек имеет не более 32 зубов. Доказать, что среди землян имеются хотя бы два человека с одним и тем же набором зубов (тот факт, что у новорождённых ещё не прорезались зубы, и другие анатомические закономерности не учитываются)	6

Задача	Условие задачи	Балл, кол-во
2	При каких значениях $a$ и $b$ выполняется равенство $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{a \cdot \cos x - b}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1?$	4
3	Решить дифференциальное уравнение $x^2 y'' = (e^y - 2x) \cdot y'$ при $y(1) = 0, y'(1) = 1$	6
4	Вычислить определённый интеграл $\int_{-1}^1 \log_3(x + \sqrt{3^{ x }} + x^2) dx$	6
5	Найти кратчайшее расстояние между кривыми $y = x^2 + 3$ и $x = y^2 + 3$	5
6	Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении числового выражения $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3})^{22}$	5
7	В десятичной записи числа $n^2 + 2014n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) последняя цифра равна 6. Найти предпоследнюю цифру	5
8	Четырёхмерный единичный куб ограничен гиперплоскостями $x_i = 0, x_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$ . Определите, что получится в сечении, если он пересечён гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$	9
9	Существует ли решение уравнения $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 6z + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z + 29} = 6?$ Если существует, то найдите хотя бы одно решение	6
10	В колоде 36 карт. Из неё извлекают пять карт. Найти вероятность того, что в этом наборе будут точно два короля, одна дама и одна карта пиковой масти	8

Только две команды смогли решить задачу с наибольшими баллами о сечении четырехмерного куба (задача 8). Причем эти команды и заняли первые два места в головном вузе по техническим специальностям. Решение представляет собой логический ход от одномерного случая к четырехмерному. В каждой размерности видна закономерность и связь с предыдущим шагом. В результате точка переходит в отрезок, отрезок в плоский треугольник, треугольник в трехмерный тетраэдр.

Естественный интерес у студентов вызвали задачи на использование логики (задача 1), бинорма Ньютона (задача 6), теории чисел (задача 7) и теории вероятностей (задача 10). Многие команды стараются их решить, и набирают значительное число баллов. У студентов первого курса аналогичный интерес вызвали задачи 8 и 10.

Задачи классические для олимпиады второго курса — вычисление определенного интеграла на основе геометрического смысла (задача 4)

и решение дифференциального уравнения с понижением порядка (задача 3) — вызвали интерес у единичного количества команд. Олимпиадное жюри, помогая студентам готовиться к олимпиаде, организовало работу кружков, на которых были рассмотрены похожие задачи и их решения. Но, несмотря на это, мало кто из студентов догадался, что в задаче 4 заменой  $t = -x$  сводим исходный интеграл к возвратному, а в дифференциальном уравнении (задача 3) можно понизить степень после элементарных математических действий.

В заключение хочется отметить, что интерес к математической олимпиаде не угасает, и число участников растет из года в год. Математика остается одной из самых сложных, но при этом привлекательных дисциплин среди студентов первого и второго курсов. Анализ результатов 2015 года в плане коррелированности сложности задачи и количества команд, решавших и решивших задачу, будет использован жюри олимпиады при формировании заданий в следующем году.

## Литература

1. Башуров В. В., Башурова О. А., Борисова Н. О. О математической олимпиаде УрГУПС // Математические методы исследования технических и экономических систем : сб. научных трудов. Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2011. С. 124—131.
2. Башуров В. В., Башурова О. А., Борисова Н. О., Пеженская Р. А. Анализ различных критериев оценки баллов на примере математической олимпиады УрГУПС // Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях : сб. научных трудов. Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2012. Вып. 4 (187). С. 144—153.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов. М. : Высшая школа. 2002. 479 с. ISBN 5-06-004214-6.

**О. В. Куликова, канд. пед. наук,**

Уральский государственный университет путей сообщения

## **Применение программы «Поиск решения» в учебном процессе при нахождении альтернативного оптимума**

**В** современном информационном обществе освоение студентами вуза задач оптимизации в процессе изучения математических дисциплин неразрывно связано с применением программного обеспечения компьютера. Электронные таблицы MS Excel активно используются как эффективное вычислительное средство при изучении линейного программирования. Этот раздел математических дисциплин знакомит студентов с методами исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения и переменные принимают действительные значения [4].

Основоположниками линейного программирования считаются Л. В. Канторович (1912–1986) и Д. Данциг (1914–2005). Впервые задача линейного программирования (ЗЛП) в России была сформулирована в 1939 г. Л. В. Канторовичем, а ее математическая модель успешно применена в экономике. В 1975 г. Л. В. Канторович получил Нобелевскую премию за достижения в этой области [2]. Американский математик Д. Данциг в 1947 г. разработал симплекс-метод решения ЗЛП [1, 4].

Математическая модель ЗЛП в стандартном виде включает целевую функцию и систему ограничений [5]

$$L(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i, x_j \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Содержание ЗЛП формулируется следующим образом [5]: необходимо найти набор действительных чисел (вектор)  $X_{\text{опт}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , доставляющий экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции (1) и удовлетворяющий системе ограничений (2). ЗЛП

может иметь одно или множество оптимальных решений. Альтернативными оптимальными решениями называются решения ЗЛП, когда гиперплоскость, представляющая целевую функцию, параллельна гиперплоскости, соответствующей связывающему неравенству, которое в точке оптимума выполняется как точное равенство [4, с. 131]. В случае альтернативного оптимума решение  $X_{\text{опт}}$  ЗЛП определяется по формуле [5]

$$X_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^n t_i X_{\text{опт}i}, \sum_{i=1}^n t_i = 1, t_i \geq 0, \quad (3)$$

где  $X_{\text{опт}i}$  — оптимальное решение в  $i$ -й угловой точке области допустимых решений (ОДР);  $n$  — количество переменных  $x_i$  в ЗЛП.

Автоматизация вычислительных процедур, обеспечивающих решение задач оптимизации, успешно осуществляется программой «Поиск решений», входящей в надстройки MS Excel (рис. 1).

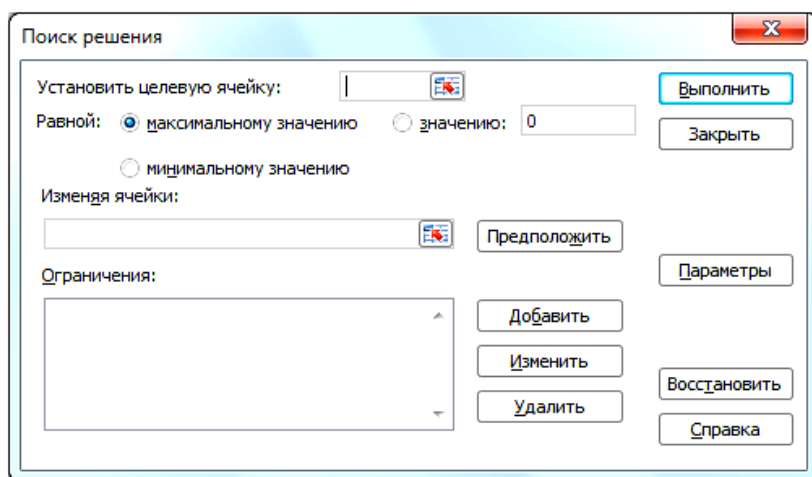


Рис. 1. Диалоговое окно программы «Поиск решения»

Размер задачи, которую можно решить с помощью базовой версии этой программы, ограничивается следующими предельными показателями: 1) 200 неизвестных; 2) 100 формульных ограничений на неизвестные; 3) 400 предельных условий на неизвестные [3]. Если программе поручается решение ЗЛП симплекс-методом в автоматическом режиме, то необходимо в разделе «Параметры» (рис. 1) установить флажок для активизации подраздела «Линейная модель» (рис. 2).



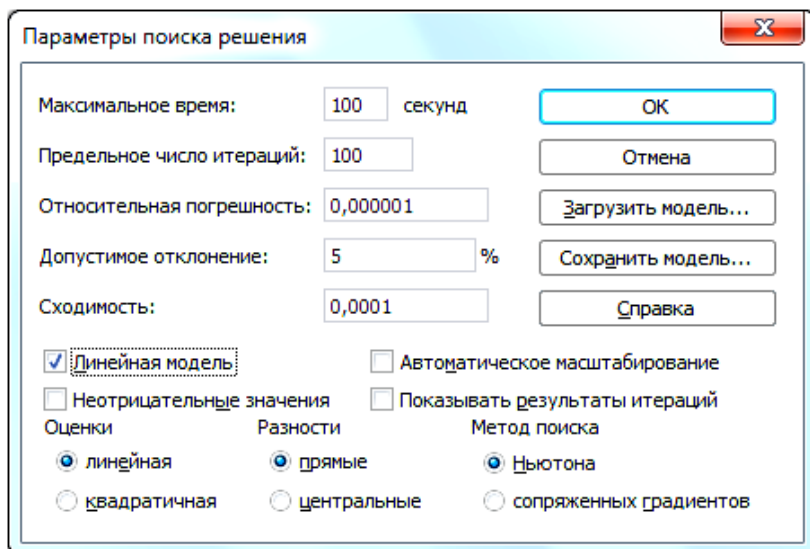


Рис. 2. Диалоговое окно подраздела «Параметры поиска решения»

Формирование понятия «ЗЛП» при подготовке бакалавров экономики в процессе изучения математических дисциплин традиционно распределяется на пять этапов. Первый этап – знакомство с математической моделью, второй – освоение графического способа, третий – овладение симплекс-методом, четвертый – применение математической модели ЗЛП для поиска оптимального значения целевой функции задач оптимизации с экономическим содержанием, пятый – использование вычислительных программ при выполнении трудоемких алгебраических преобразований [5]. При этом должное внимание уделяется решению ЗЛП с единственным решением и предполагается, что студенты на основе сформированных у них общекультурных и профессиональных компетенций смогут самостоятельно рассмотреть вопрос об альтернативном оптимуме, требующем нахождения множества решений ЗЛП. Анализ оптимальных решений ЗЛП представляется важным условием понимания студентами существенных взаимосвязей ее модели, поэтому рассмотрение этого вопроса непременно обогатит их знания и умения по линейному программированию.

Программа «Поиск решения» MS Excel при решении ЗЛП с альтернативным оптимумом находит только одно оптимальное решение

$X_{\text{опт}i}$  и сообщает пользователю значение целевой функции  $L(X_{\text{опт}i})$  [3]. В этом случае определение  $X_{\text{опт}}$  по формуле (3) становится возможным, если моделируются ситуации, позволяющие получить достаточное количество  $X_{\text{опт}i}$ . Плодотворной представляется идея о введении вспомогательных целевых функций  $L_i^*(X)$ , у которых один коэффициент, стоящий перед неизвестным сохраняется, а все другие изменяются на некоторую небольшую положительную величину  $\delta$ . Если требуется найти максимум, то введение  $\delta$  должно увеличить значение  $L_i^*(X)$  относительно  $L_{\max}(X)$ . Если требуется найти минимум, то введение  $\delta$  должно уменьшить  $L_i^*(X)$  относительно  $L_{\min}(X)$ . Количество  $L_i^*(X)$  равно количеству неизвестных. Функции  $L_i^*(X)$  отличаются друг от друга набором изменяемых коэффициентов. Нахождение экстремальных значений функций  $L_i^*(X)$  на ОДР исходной ЗЛП направлено на установление координат угловых точек ОДР, которые определяют все необходимые  $X_{\text{опт}i}$  для составления  $X_{\text{опт}}$ .

Пусть, например, требуется найти решение ЗЛП с двумя переменными и альтернативным максимумом. Математическая модель такой задачи будет иметь вид

$$L(x_1; x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max. \quad (4)$$

В этом случае вводятся две вспомогательные функции  $L_1^*(X)$  и  $L_2^*(X)$

$$\begin{cases} L_1^*(X) = c_1 x_1 + (c_2 + \delta) x_2 \rightarrow \max, \\ L_2^*(X) = (c_1 + \delta) x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max, \delta > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Геометрическая интерпретация ЗЛП (4) и вспомогательных целевых функций (5) отражена на рис. 3.

Линия уровня целевой функции  $L(x_1; x_2)$  ЗЛП (4), определяемая уравнением  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = L_{\max}$ , совпадает с одной из границ ОДР, которая задается уравнением  $p c_1 x_1 + p c_2 x_2 = b_1$  и представлена отрезком  $M_1 M_2$  (рис. 3). Расположение вектора  $\vec{n} = \{c_1; c_2\}$  целевой функции  $L(x_1; x_2)$  относительно системы координат  $0x_1 x_2$  характеризуется углом наклона  $\alpha$  ( $\tg \alpha = c_1/c_2$ ).

Если  $c_2$  увеличивается на положительную величину  $\delta$ , а  $c_1$  остается без изменения, то в этом случае вектор  $\vec{n} = \{c_1; c_2\}$  совершает поворот против хода часовой стрелки, а линия уровня целевой функции  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = L_{\max}$  принимает положение, которое на рис. 3 отмечено как  $L_{1\max}^*$  ( $L_1^*(X) = \max$ ). Вспомогательная целевая функция  $L_1^*(X)$

будет иметь на ОДР ЗПЛ (4) единственное максимальное решение, которому соответствуют значения координат точки  $M_1(x_{11}; x_{12})$  (рис. 3).

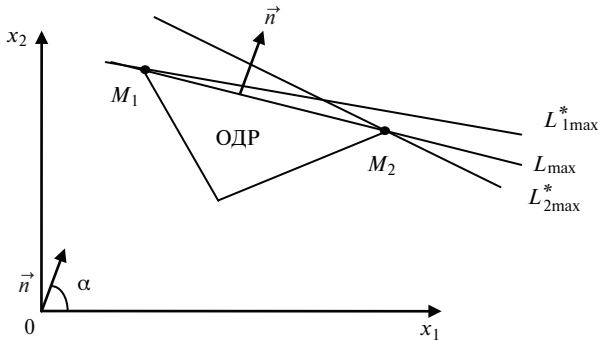


Рис. 3. Линии уровней максимальных значений целевых функций

Если  $c_1$  увеличивается на положительную величину  $\delta$ , а  $c_2$  остается без изменения, то вектор  $\vec{n} = \{c_1; c_2\}$  будет совершать поворот по ходу часовой стрелки и линия уровня целевой функции  $c_1x_1 + c_2x_2 = L_{\max}$  примет положение, которое на рис. 3 отмечено как  $L_{2\max}^*$  ( $L_2^*(X) = \max$ ). Вспомогательная целевая функция  $L_2^*(X)$  будет иметь на ОДР ЗПЛ (4) единственное максимальное решение, которому соответствуют значения координат точки  $M_2(x_{21}; x_{22})$  (рис. 3).

Нахождение координат точек  $M_1$  и  $M_2$ , которые являются угловыми на ОДР ЗПЛ (4), позволяет составить множество  $X_{\max}$  по формуле (3)

$$X_{\max} = t_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = [t_1 + t_2 = 1] = t \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Рассмотрим применение программы «Поиск решения» при нахождении альтернативного максимума, если математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$L(x_1; x_2) = 6x_1 + 9x_2 \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 3, \\ 3x_1 - x_2 \geq 13, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Введем в ячейки электронного процессора необходимую информацию о математической модели (7), используя диалоговые окна программы (рис. 1, 2), и получим результат автоматических вычислений. Переменные  $x_1$  и  $x_2$  принимают соответственно значения 9 и 3, а максимум целевой функции равен 81. Найти  $X_{\max}$  не представляется возможным, так как программа закончила свою работу и не в состоянии сообщить информацию о другой угловой точке ОДР. Составим вспомогательные целевые функции:

$$\begin{cases} L_1^*(x_1; x_2) = 6x_1 + 9, 1x_2 \rightarrow \max, \\ L_2^*(x_1; x_2) = 6, 1x_1 + 9x_2 \rightarrow \max. \end{cases} \quad (8)$$

Запишем две функциональные зависимости (8) в отдельные ячейки Excel, запустим дважды программу в режим автоматических расчетов и зафиксируем два решения:  $L_{1\max}^*(6; 5) = 81,5$  и  $L_{2\max}^*(9; 3) = 81,9$ .

Составим  $X_{\max}$  по формуле (6) и отметим значение целевой функции  $L(X_{\max})$  для ЗЛП (7)

$$X_{\max} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3t \\ 3+2t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1,$$

$$L(X_{\max}) = 6(9-3t) + 9(3+2t) = 81.$$

Если требуется найти решение ЗЛП с двумя переменными и альтернативным минимумом, то математические модели вспомогательных целевых функций будут иметь вид

$$\begin{cases} L_1^*(X) = (c_1 - \delta)x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min, \\ L_2^*(X) = c_1x_1 + (c_2 - \delta)x_2 \rightarrow \min, \delta > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Геометрическая интерпретация расположения линий уровней вспомогательных целевых функций (9) при нахождении альтернативного минимума представлена на рис. 4.

Если математическая модель ЗЛП имеет вид

$$L(x_1; x_2) = 2x_1 + 14x_2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \geq 30, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 23, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

то в результате работы программы «Поиск решения» будут получены значения переменных ( $x_1 = 2; x_2 = 4$ ) и целевой функции ( $L_{\min}(2; 4) = 60$ ). Построение вспомогательных целевых функций

$$\begin{cases} L_1^*(x_1; x_2) = 1,9x_1 + 14x_2 \rightarrow \min, \\ L_2^*(x_1; x_2) = 2x_1 + 13,9x_2 \rightarrow \min, \end{cases} \quad (11)$$

и последующее использование программы «Поиск решения» позволит установить координаты угловых точек (9; 3), (2; 4) и минимальные значения вспомогательных целевых функций  $L_{1\min}^*(9; 3) = 58,2$  и  $L_{2\min}^*(2; 4) = 59,6$ .

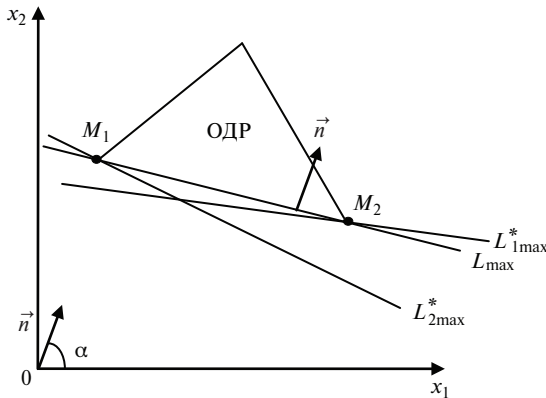


Рис. 4. Линии уровней минимальных значений целевых функций

Составим  $X_{\min}$  по формуле (6) и отметим значение целевой функции  $L(X_{\min})$  для ЗЛП (10)

$$X_{\min} = t \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7t \\ 4-t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1,$$

$$L(X_{\min}) = 2(2 + 7t) + 14(4 - t) = 60.$$

Построение вспомогательных целевых функций (9) и (11) обеспечивает возможность составления множества  $X_{\text{опт}}$  оптимальных решений рассмотренных ЗЛП (7) и (10). Введение небольшой положительной величины  $\delta$  в функциональные зависимости позволяет использовать в учебном процессе при нахождении альтернативного оптимума не только графический способ, но широко распространенное программное обеспечение MS Excel.

Предложенная идея решения ЗЛП, имеющей альтернативный оптимум, с помощью программы «Поиск решения» MS Excel иллюстрируется на примере нахождения  $X_{\text{опт}}$  для математической модели с двумя переменными. Изложение рассуждений сопровождается доступной геометрической интерпретацией, что создает благоприятные условия для понимания выполняемых преобразований. Рациональное сочетание аналитических методов и современных информационных технологий способствует активизации познавательной деятельности студентов, так как в этом случае решение задач не требует больших временных затрат, а трудоемкие вычисления выполняются программой компьютера.

## Литература

1. Алексеева Е. В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи : учеб. пособие. — Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2012. 131 с.
2. Вершик А. М. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый : В 2 т. Новосибирск : Изд-во СО РАН. Филиал «Гео», 2002. Т.1. 542 с.
3. Вуколов Э. А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL : учеб. пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : ФОРУМ, 2008. 464 с. ISBN 978-5-91134-231-9.
4. Данциг Дж. Линейное программирование, его применение и обобщение / пер. с англ. Г. Н. Андрианова, Л. И. Горькова, А. А. Корбута, А. Н. Ляпунова. М. : Изд. «Прогресс», 1966. 600 с.
5. Красс М. С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учеб. пособие, 2008. 688 с. ISBN 978-5-77-49-0500-3.
6. Таха Хемди А. Введение в исследование операций / Пер. с англ. А. А. Минько / М. : Изд. дом «Вильямс», 2005. 912 с. ISBN 5-8459-0740-3.

## Раздел 3

# Применение математических методов и моделей в учебных исследованиях студентов

---

М. Ю. Филиппов, 4-й курс,

Кр.Л. Геут, ассистент,

Уральский государственный университет путей сообщения

### Программная реализация генерации неприводимых бинарных многочленов

**В**ажнейшим требованием совершенствования транспортных систем является безопасная передача управляющих и технологических сообщений и обеспечение защиты информационных систем от несанкционированных вмешательств [1–3].

Управление в таких системах осуществляется посредством запрограммированных устройств — конечных автоматов. Примером кодирующего аппарата служит регистр сдвига с линейной связью. Конечные автоматы, работа которых зависит от запрограммированного характеристического многочлена, нашли широкое применение при построении (организации) каналов связи во всевозможных областях, в том числе и на транспорте.

Выбор характеристического многочлена равносителен построению регистра линейного сдвига. Период характеристического многочлена определяет цикл работы регистра сдвига. Поэтому актуальной задачей становится построение неприводимых многочленов для реализации экономических регистров сдвига с обратными связями, обладающими большими периодами работы в автономном режиме. Для решения этого вопроса в [4] рассмотрена идея расширения полей и построено бинарное дерево посредством применения операции  $A: F(x) = f(x^2 + x)$ . Причем движение по такому дереву возможно как «сверху вниз» с помощью операции «A», так и «снизу вверх», применив обратную операцию «антиA».

Алгоритм заключался в поиске для данного многочлена «многочлена-напарника», их перемножении и «подборе» многочлена, из которого посредством операции А было получено произведение посредством свертки степеней [5]. В статье [6] приведены расчеты и автоматизация в программе MS Excel многочленов  $\deg f = 16$ . В настоящей статье приведены результаты доработанной программы.

Преимуществом MS Excel является возможность представления каждого члена многочлена как отдельного значения, что дает возможность работать с многочленами больших порядков (64, 128 и т.д.). Другие математические редакторы не могут работать с числами порядка 128 без дополнительных преобразований.

В описанной авторами статье ввод многочленов и вычисление больших степеней занимает много времени, нет и функции сохранения результатов для их систематизации [6].

Для решения этих задач была написана программная оболочка в Delphi 7. Интерфейс программы представлен на рис. 1.



Рис. 1. Интерфейс программы

В данной программе появилась возможность загрузки многочленов 16, 32 или 64 степени из предварительно созданного файла. Для исключения ошибок на каждом этапе активными являются только используемые в данный момент клавиши. После выбора нужного многочлена и нажатия кнопки «Выбрать» многочлен загружается в программу MS Excel. При нажатии кнопки «Результат» в окно вычисления попадают промежуточные вычисления (выбранный многочлен, «многочлен-напарник», произведение многочленов и искомый многочлен).



Еще одна функция программы – запись результата в отдельный файл для последующей загрузки многочленов из этого файла, что позволяет просчитать полную ветвь многочлена в дереве.

Сгенерированные многочлены могут найти свое применение для программирования регистров сдвига, широко используемых в различных областях защиты информации и автоматизации систем.

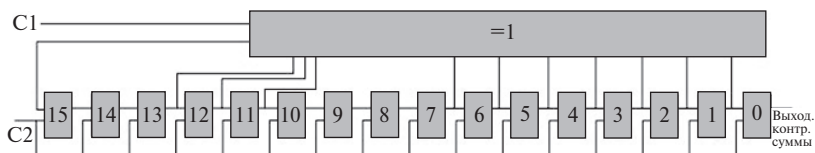


Рис. 2. Сдвиговый регистр LFSR карты PnP

Схеме на рис. 2 соответствует характеристический неприводимый многочлен  $x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ . Период этого многочлена равен 4369, т.е. с помощью этого регистра можно запрограммировать 4369 операции (команды).

Еще одной сферой применения сгенерированных многочленов является потоковое шифрование, например, потоковый шифр (шифр гаммирования) A5, применяемый для защиты телефонных переговоров в европейской системе мобильной связи GSM (Group Special Mobile). На основе данного шифра находится одно из практических применений задачи о разработке эффективного алгоритма вычисления (или оценки)  $ill(\Phi)$  для отображения  $\Phi$  из некоторых практических интересных классов [7, с. 110, задача № 2.129].

Таким образом, данная статья продолжает тематику генерации неприводимых многочленов в конечных полях характеристики два. Представление таких многочленов в виде битовых строк позволяет использовать их в информационных технологиях, теории кодирования и других областях. Конечные автоматы, работа которых зависит от запрограммированного характеристического многочлена, нашли широкое применение при построении (организации) каналов связи во всевозможных областях, в том числе и на транспорте.

## Литература

1. Болотов А.А., Гашков С.Б., Фролов А.Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: алгебраические и алгоритмические основы. М. : КомКнига, 2006. — 360 с.

2. Болотов А. А., Гашков С. Б., Фролов А.Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: протоколы криптографии на эллиптических кривых. М. : КомКнига, 2006. — 280 с.
3. Глушко Кр. Л., Титов С. С. Специфика проблем связи и управления на транспорте // Инновационный транспорт. 2012. С. 44–50.
4. Букина Е. А., Ванцева О. О., Филиппов М. Ю., Геут Кр. Л. Построение бинарного дерева посредством поликватратичного расширения // Математическое моделирование системы взаимодействий прикладных исследований : сб. науч. тр. Екатеринбург : Изд-во УрГУПС. 2013. С. 73–78.
5. Титов С. С., Торгашова А.В. Генерация неприводимых многочленов, связанных степенной зависимостью корней // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2 (22); Ч. 1. 2010. С. 310–318.
6. Букина Е. А., Ванцева О. О., Филиппов М. Ю., Геут Кр. Л. Автоматизация математического алгоритма расширения бинарных полей // Безопасность информационного пространства : м-лы XII Всерос. науч.-практ. конф. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — С. 214–219.
7. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. М. : Изд-во МЦНМО, 2004. — 470 с.

УДК 519.2

**К. В. Курмаева,**

канд. физ.-мат. наук,

**Д. В. Шатохин,**

2 курс, филиал УрГУПС в г. Нижнем Тагиле

## Регрессионный анализ на примере установления взаимосвязи показателей обучения студентов технического вуза

Часто говорят, что цифры правят миром;  
по крайней мере, нет сомнений в том,  
что цифры показывают, как он управляется.

*Йоганн Вольфганг Гёте*

В современном научном мире статистика является самостоятельной областью знаний, имеющей свой предмет, методы и принципы исследования. Становлению статистики как науки способствовало наличие во многих сферах человеческой деятельности практических потребностей в сборе, анализе, определении закономерностей и интерпретации числовых данных о массовых явлениях и процессах. В настоящее время статистика является надежным инструментом, обеспечивающим планирование, управление и прогнозирование на основе объективных оценок, приближенных к реальной действительности.

Чаще всего статистическое исследование базируется на построении и анализе некоторой математической модели изучаемого объекта. Одним из специальных методов, гарантирующим всестороннюю и детальную оценку имеющейся совокупности статистических данных на основе математической модели, является регрессионный анализ. Этот метод позволяет определить степень воздействия независимых (факторных) переменных на зависимую (результативную) переменную, направление и силу изучаемой связи на основе построения соответствующей функциональной зависимости. Как правило, применяют линейную функцию (парную или множественную), параметры которой определяются методом наименьших квадратов.

Можно ли объяснить успеваемость студента по математике на первом курсе технического вуза – результативная переменная  $y$  – успешностью прохождения им ЕГЭ по математике в 11 классе – факторная переменная  $x$ .

Применение регрессионного анализа к решению поставленной задачи объясняется тем, что исходные данные, в нашем случае это оценки и баллы, являются однородными; число рассматриваемых переменных не слишком велико, в нашем случае число переменных равно одному (количество наблюдений в семь раз больше количества рассматриваемых переменных, что позволит получить надежные оценки коэффициентов регрессии); среди факторных переменных отсутствуют дублирующие переменные.

Математической моделью линейной взаимосвязи  $y$  и  $x$  выступает уравнение парной линейной регрессии, которое имеет вид

$$\hat{y}(x) = h + bx.$$

Параметры  $h$  и  $b$  находим методом наименьших квадратов из решения системы уравнений

$$\begin{cases} 7h + b \sum_{i=1}^7 x_i = \sum_{i=1}^7 y_i, \\ h \sum_{i=1}^7 x_i + b \sum_{i=1}^7 x_i^2 = \sum_{i=1}^7 x_i y_i, \end{cases}$$

где  $\sum_{i=1}^7 x_i = 362$ ,  $\sum_{i=1}^7 y_i = 26$ ,  $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 19876$ ,  $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 1388$  (значения представленных сумм находят с помощью расчетной таблицы 1).

Таблица 1

Расчетная таблица парной линейной регрессии

Номер студента	$y$	$x$	$(y - \bar{y})^2$	$\hat{y}(x)$	$ y - \hat{y}(x) $	$(\hat{y}(x) - \bar{y})^2$
1	3	24	0,510204	2,682	0,318	1,065614
2	3	48	0,510204	3,594	0,594	0,014469
3	3	48	0,510204	3,594	0,594	0,014469
4	4	66	0,081633	4,278	0,278	0,317774
5	4	56	0,081633	3,898	0,102	0,033751
6	4	60	0,081633	4,05	0,05	0,112704

Номер студента	$y$	$x$	$(y - \bar{y})^2$	$\hat{y}(x)$	$ y - \hat{y}(x) $	$(\hat{y}(x) - \bar{y})^2$
7	5	60	1,653061	4,05	0,95	0,112704
$\Sigma$	26	362	3,428571	26,146	2,886	1,671484

Значения параметров  $h$  и  $b$  определяют по формулам Крамера:

$$h = \frac{\Delta_h}{\Delta} = 1,77, b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = 0,038.$$

В результате вычислений уравнение парной линейной регрессии примет следующий вид [1, 2]:

$$\hat{y}(x) = 1,77 + 0,038x.$$

Параметр  $h = 1,77$  выполняет роль доводки до соотношения между средними  $x$  и  $y$ , никакого определенного смысла в него не вкладывается. Значение параметра  $b = 0,038$  (коэффициент регрессии) показывает, что увеличение количества набранных баллов на ЕГЭ определяет увеличение оценки на экзамене в конце первого курса на 0,038 балла. Знак коэффициента регрессии определяет направление связи между  $y$  и  $x$ . В нашем случае  $b > 0$ , следовательно, связь является прямой, это значит, что с ростом накопленных баллов на ЕГЭ оценка на экзамене будет увеличиваться.

Теснота линейной связи характеризуется парным коэффициентом корреляции, значение которого по абсолютной величине находится на отрезке  $0 \leq r_{xy} \leq 1$ . Чем ближе значение  $r_{xy}$  к единице, тем сильнее связь.

Определим коэффициент корреляции по формуле [1, 2]

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}} = 0,69 \approx 0,7,$$

$$\text{где } \bar{x} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i = 51,71, \bar{y} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 y_i = 3,71.$$

Полученное значение  $r_{xy}$  находится в интервале от 0,7 до 1, поэтому заключаем, что рассмотренная связь является значительной.

Связь между коэффициентом корреляции и коэффициентом регрессии устанавливается по формуле [1, 2]

$$r_{yx} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,69 \approx 0,7,$$

где  $\sigma_x = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{7}} = 12,85$ ,  $\sigma_y = \sqrt{\frac{(y_i - \bar{y})^2}{7}} = 0,70$  — соответствующие среднеквадратические отклонения переменных  $x$  и  $y$ .

В отличие от коэффициента корреляции, устанавливающего симметричную меру связи между  $x$  и  $y$  ( $r_{xy} = r_{yx} = 0,7$ ), коэффициент регрессии является асимметричной характеристикой связи, описывающей не просто связь между переменными, а зависимость изменения  $y$  от  $x$ , но не наоборот, т. е.  $k_{yx} \neq k_{xy}$ .

Доля вариации результативного признака  $y$  под действием факторного признака  $x$  определяется величиной коэффициента детерминации  $r_{yx}^2 = 0,48$ . Это означает, что заработанными баллами при прохождении ЕГЭ по математике учеником 11 класса можно объяснить 48 % различий в оценках, полученных в результате экзамена в конце 1 курса.

Для непосредственной оценки влияния факторов на результативный признак в случае различных единиц измерения исследуемых показателей вычисляют коэффициент эластичности, который определяет среднее изменение (в процентах) результативного признака  $y$  при изменении факторного признака  $x$  на 1 %. Значение коэффициента эластичности:

$$\bar{\Theta}_{yx} = b \frac{x}{y} = 0,038 \frac{362}{26} = 0,53 \, \%.$$

Это означает, что при увеличении набранных баллов на ЕГЭ на 1% следует ожидать повышение оценки за экзамен в вузе 0,53 %.

Определим ошибку аппроксимации для полученного уравнения парной линейно регрессии по формуле [1, 2]

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^7 |y_i - \hat{y}_i(x_i)|}{\sum_{i=1}^7 y_i} \times 100\%.$$

Для этого вычислим теоретические значения экзаменационной оценки для каждого студента  $\hat{y}_i(x_i)$  (см. таблицу 1). И получим, что

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2,886}{26} \cdot 100 = 11,1\%.$$

Данный результат говорит о высоком качестве уравнения регрессии, т. к. ошибка аппроксимации в пределах 6–10 % говорит о соответствии полученной регрессионной модели исходным данным.

Определим степень детерминации регрессией вариации  $y$ , т. е. найдем коэффициент детерминации [1, 2]

$$\eta^2 = \frac{\sum_{i=1}^7 (\hat{y}_i(x_i) - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y}_i)^2} = 0,48,$$

где  $\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y}_i)^2 = 3,43$  — общая вариация,  $\sum_{i=1}^7 (\hat{y}_i(x_i) - \bar{y}_i)^2 = 1,67$  — вариация  $y$ , объясняемой уравнением регрессии.

Отсюда  $\eta^2 = 0,48$ , или 48 %, что совпадает с ранее полученным значением коэффициента детерминации.

Значение детерминации показывает, что уравнение регрессии может использоваться для прогнозирования оценки, полученной студентом на экзамене по математике в зависимости от балла, полученного на ЕГЭ в 11 классе.

В течение семестра каждому студенту выставляется рейтинг, учитывающий выполнение им текущих контрольно-обучающих мероприятий и результат тестирования в i-exam.ru. Выясним, будет ли рейтинговый балл ( $x_2$ ) оказывать влияние на оценку, полученную при прохождении промежуточной аттестации. В этом случае введение второго фактора в исследование приводит к необходимости применения множественной регрессии для линейной двухфакторной модели, уравнение которой в натуральном масштабе имеет вид [1, 2]

$$\hat{y}(x) = h + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Поскольку все включенные переменные  $x_1$  и  $x_2$  имеют свою размерность, то по значениям коэффициентов  $b_1$  и  $b_2$  нельзя делать вывод — какая из переменных влияет на  $y$  сильнее, а какая слабее.

Исходные данные для поставленной задачи представлены в таблице 2.

Таблица 2

Расчетная таблица двухфакторной линейной регрессии

Номер студента	$y$	$x_1$	$x_2$
1	3	24	4
2	3	48	16
3	3	48	9
4	4	66	60
5	4	56	58
6	4	60	24
7	5	60	62
$\Sigma$	26	362	233

Для нахождения параметров множественной регрессии запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 7h + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 = \sum y; \\ h \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 = \sum y x_1; \\ h \sum x_2 + b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 = \sum y x_2. \end{cases}$$

Решение, которой получим через отношение частных определителей к определителю системы:

$$h = \frac{\Delta_h}{\Delta} = 2,65, b_1 = \frac{\Delta_{b_1}}{\Delta} = 0,006, b_2 = \frac{\Delta_{b_2}}{\Delta} = 0,022.$$

Таким образом, получили

$$\hat{y}(x) = 2,65 + 0,006x_1 + 0,022x_2.$$

Полученные коэффициенты множественной регрессии при закреплении соответствующей факторной переменной можно интерпретировать следующим образом. На 0,006 балла в среднем повысится оценка, полученная на экзамене в конце первого курса при увеличении результата ЕГЭ на 1 балл. На 0,022 балла в среднем повысится оценка, полученная на экзамене в конце первого курса при увеличении рейтинга в течение семестра на 1 балл.



Выясним, какой из рассматриваемых факторов оказывает большее влияние на результативный признак  $y$ . Для этого уравнение множественной регрессии запишем в стандартизированном масштабе [1, 2]

$$\hat{t}_0 = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2,$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — стандартизированные коэффициенты регрессии, определяющие, на какую часть своего среднеквадратического отклонения изменится  $y$  при изменении  $x_1$  и  $x_2$  на одно среднеквадратическое отклонение.

Отсутствие свободного члена в уравнении в стандартизированном масштабе объясняется тем, что все переменные выражены через отклонения от средних величин.

Для нахождения стандартизированных коэффициентов регрессии составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \beta_1 \sum t_1 t_1 + \beta_2 \sum t_1 t_2 = \sum t_0 t_1, \\ \beta_1 \sum t_1 t_2 + \beta_2 \sum t_2 t_2 = \sum t_0 t_2, \end{cases}$$

$$\text{где } t_{0i} = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}; t_{1i} = \frac{x_{1i} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}}; t_{2i} = \frac{x_{2i} - \bar{x}_2}{\sigma_{x_2}};$$

$$\sum t_0 t_1 = \sum_{i=1}^7 \left( \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \right) \left( \frac{x_{1i} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} \right) = 4,407;$$

$$\sum t_0 t_2 = \sum_{i=1}^7 \left( \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \right) \left( \frac{x_{2i} - \bar{x}_2}{\sigma_{x_2}} \right) = 5,966; \sum t_1 t_1 = \sum_{i=1}^7 \left( \frac{x_{1i} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} \right)^2 = 5,827;$$

$$\sum t_1 t_2 = \sum_{i=1}^7 \left( \frac{x_{1i} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} \right) \left( \frac{x_{2i} - \bar{x}_2}{\sigma_{x_2}} \right) = 4,808;$$

$$\sum t_2 t_2 = \sum_{i=1}^7 \left( \frac{x_{2i} - \bar{x}_2}{\sigma_{x_2}} \right)^2 = 7.$$

Решение находим по формулам Крамера:

$$\beta_1 = \frac{\Delta_{\beta_1}}{\Delta} = 0,12; \beta_2 = \frac{\Delta_{\beta_2}}{\Delta} = 0,77.$$

Отсюда видно, что  $b_1 < b_2$ , поэтому рейтинговые баллы, набранные в течение семестра ( $x_2$ ), больше влияют на результат, нежели баллы, набранные на ЕГЭ ( $x_1$ ).

В теории регрессионного анализа есть формулы, обеспечивающие обратный переход в уравнении многофакторной регрессии от стандартизированного масштаба к натуральному. При этом коэффициенты регрессии  $b_i$  находятся на основе  $b_i$ -коэффициентов следующим образом;

$$b_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} = 0,006; b_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} = 0,022,$$

где  $\sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{7}} = 14,08; \sigma_{x_2} = \sqrt{\frac{(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{7}} = 23,85;$

$\sigma_y = \sqrt{\frac{(y_i - \bar{y})^2}{7}} = 0,70$  – соответствующие среднеквадратические отклонения переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и  $y$ .

Таким образом, вычисления по обратным формулам перехода показывают правильность расчета коэффициентов в обоих масштабах.

Далее вычислим совокупный коэффициент детерминации по формуле

$$R^2 = \sum_{i=1}^2 r_{yx_i} \beta_i = 0,731.$$

Из этого следует, что вариация возможной оценки на экзамене по математике на 73,1 % зависит от вариации набранных баллов за ЕГЭ и вариации набранных баллов за промежуточные аттестации в течение семестра. При этом важно знать вклад каждой факторной переменной в результативную переменную. Для этого на практике вычисляют коэффициенты раздельной детерминации

$$d_1^2 = r_{yx_1} \beta_1 = 0,077;$$

$$d_2^2 = r_{yx_2} \beta_2 = 0,654.$$

Таким образом, из 73,1 % вариации возможной оценки на экзамене по математике: 7,7 % объясняется вариацией набранных баллов на ЕГЭ, а 65,4 % – вариацией рейтингового балла, набранного в течение семестра.

Определим влияние отдельных факторов в уравнении множественной регрессии, вычислив значение частных коэффициентов эластичности

$$\bar{\epsilon}_{yx_1} = b_1 \frac{\bar{x}_1}{y} = 0,083; \bar{\epsilon}_{yx_2} = b_2 \frac{\bar{x}_2}{y} = 0,197.$$

Полученные результаты означают, что при увеличении баллов на ЕГЭ на 1 % от их среднего уровня оценка, полученная на экзамене увеличится на 8,3 % от своего среднего уровня, при увеличении рейтингового балла в конце семестра на 1 % от его среднего значения оценка увеличится на 19,7 %. Таким образом, получили подтверждение ранее полученного результата, что влияние фактора  $x_2$  сильнее, чем влияние фактора  $x_1$ .

Применение парной линейной регрессии позволило установить, что оценка на экзамене по математике зависит от количества баллов, полученных по математике на ЕГЭ в конце 11 класса. Кроме этого, построение двухфакторной линейной регрессии показало, что повышение оценки на экзамене в конце первого курса в большей степени определяется рейтинговым баллом, полученным студентом в течение семестра, нежели баллом ЕГЭ. Числовыми расчетами обоснована адекватность построенных регрессионных моделей.

### Литература

1. Введение в регрессионный анализ и планирование регрессионных экспериментов в экономике : учеб. пособие / Г. А. Соколов, Р. В. Сагитов. — М. : ИНФРА-М, 2010. 202 с. ISBN 978-5-16-003646-5.
2. Статистика : учеб. для вузов / под ред. И. И. Елисеевой. СПб : Питер, 2012. 368 с. ISBN 978-5-459-01234-7.

## Проверка возможности определения свойств веса булевой функции по виду полинома Жегалкина

**А**лгебраическая нормальная форма (АНФ), или полином Жегалкина — это форма представления логической (булевой) функции в виде полинома с коэффициентами вида 0 и 1, в которой используются две операции: в качестве произведения — конъюнкция, а в качестве сложения — исключающее «ИЛИ» (сложение по модулю два) [1].

Теорема И. И. Жегалкина: «Каждая функция  $f \in F_n$  может быть представлена единственным образом в виде полинома из  $F_2[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ , степень которого по каждой переменной не превосходит 1» [2].

Доказательство единственности представления функции посредством полинома Жегалкина может быть произведено следующим образом. Подсчитаем число полиномов Жегалкина от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , то есть число выражений вида  $\sum_{(i_1, \dots, i_s)} a_{i_1 \dots i_s} x_{i_1} \dots x_{i_s}$ . Число членов равно количеству подмножеств  $(i_1, \dots, i_s)$  из  $n$  чисел  $(1, \dots, n)$ , то есть  $2^n$ . Поскольку равно 0 или 1, искомое число полиномов равно  $2^{2^n}$  и равно числу всех булевых функций от тех же переменных [3].

Полином Жегалкина можно представить в виде

$$P(x_1 \dots x_n) = a \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus \dots \oplus a_{1 \dots n} x_1 \dots x_n \in \{0, 1\}.$$

Таблица истинности функции, зависящей от четырех переменных, представлена в таблице 1.

Таблица 1

Таблица истинности для функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Для построения алгебраической нормальной формы запишем эту функцию в виде полинома Жегалкина с неопределенными коэффициентами:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{0000} \oplus a_{0001} \cdot x_4 \oplus a_{0010} \cdot x_3 \oplus a_{0011} \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus a_{0100} \cdot x_2 \oplus a_{0101} \cdot x_2 \cdot x_4 \oplus; \\ \oplus a_{0110} \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus a_{0111} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus a_{1000} \cdot x_1 \oplus a_{1001} \cdot x_1 \cdot x_4 \oplus a_{1010} \cdot x_1 \cdot x_3 \oplus a_{1011} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus; \\ \oplus a_{1100} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus a_{1101} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \oplus a_{1110} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus a_{1111} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4.$$

Сейчас необходимо найти эти неопределенные коэффициенты. Для того вместо переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  подставим конкретные значения функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  из таблицы истинности, причем эти значения возьмём из строк, соответствующих номеру неопределенного коэффициента.

Далее приведены частичные вычисления.

$$f(0, 0, 0, 0) = 0, \text{ следовательно, } a_{0000} = 0;$$

$$f(0, 0, 0, 1) = a_{0000} \oplus a_{0001} = 0 \oplus 0, \text{ следовательно, } a_{0001} = 0;$$

$$f(0, 0, 1, 0) = a_{0000} \oplus a_{0010} = 0 \oplus 0, \text{ следовательно, } a_{0010} = 0;$$

$$f(0, 0, 1, 1) = a_{0000} \oplus a_{0001} \oplus a_{0010} \oplus a_{0011} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1, \text{ следовательно, } a_{0011} = 0.$$

Там, где значение функции получилось равным единице, соответствующий коэффициент тоже равен 1. Поэтому с учетом подстановки коэффициентов мы можем записать следующую функцию:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \oplus 0 \cdot x_4 \oplus 0 \cdot x_3 \oplus 1 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus 0 \cdot x_2 \oplus 1 \cdot x_2 \cdot x_4 \oplus 1 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus; \\ \oplus 1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus 0 \cdot x_1 \oplus 0 \cdot x_1 \cdot x_4 \oplus 0 \cdot x_1 \cdot x_3 \oplus 0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus 1 \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus a_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \oplus; \\ \oplus 1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus 0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = x_3 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_3 \oplus x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

В итоге мы получили алгебраически нормальную форму записи данной булевой функции по таблице истинности [1].

Данные вычисления гораздо легче проводить в таблице. В этом случае мы получаем полином Жегалкина путем построения дополнительной таблицы. Ее первый столбец заполняется в соответствии со значениями функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , а каждый последующий заполняется путем сложения ячеек предыдущего столбца по модулю два, т. е. каждая ячейка заполняется результатом суммирования по модулю два ячеек предыдущего столбца, стоящих в той же строке и строкой ниже. В верхней строке треугольной таблицы ячейки последовательно нумеруются в двоичной системе. Каждому двоичному коду ставится в соответствие один из членов полинома Жегалкина в зависимости от позиций кода, в которых стоят единицы. Если в верхней строке одного из столбцов стоит единица, то этот член присутствует в полиноме Жегалкина. Эти члены записываются путем сложения по модулю два (таблица 2) [2].

Таблица 2

1	$x_4$	$x_3$	$x_3 \cdot x_4$	$x_2$	$x_2 \cdot x_4$	$x_2 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1$	$x_1 \cdot x_4$	$x_1 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0		
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0			
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0				
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1					
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0						
0	0	0	0	1	0	1	1	0							
0	0	0	1	1	1	0	1								
0	0	1	0	0	1	1									
0	1	1	0	1	0										
1	0	1	1	1											
1	1	0	0												
0	1	0													
1	1														
0															

Получается:  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_3 \oplus x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ .

Построенный полином Жегалкина состоит из мономов. Отдельные мономы или их определенные множества могут отвечать за свойства веса булевой функции. Старший моном  $x_1 x_2 \dots x_n$  отвечает за четность веса булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . То есть если в полиноме

Жегалкина присутствует моном, состоящий из произведения всех существующих переменных, от которых зависит функция, то с уверенностью можно сказать, что вес этой булевой функции нечетен. В противном случае он будет четным [2].

Но можно ли выделить множество мономов булевой функции, которое будет отвечать, например, за уравновешенность этой функции, за делимость веса булевой функции на  $2^k$ , где  $k = 2, k = 3$  (задача 2.31 (нерешённая)) [2]?

Уравновешенность булевой функции означает, что количество единиц в ее таблице истинности будет равно количеству нулей.

Чтобы доказать существование такого множества мономов булевой функции, которое будет отвечать за уравновешенность этой

функции, необходимо построить  $C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$  полиномов Жегал-

кина для функции, зависящей от трех переменных, так как ее таблица истинности состоит из восьми строк (а уравновешенность функции будет означать, что в этих восьми строках должны быть размещены четыре единицы семьюдесятью способами), или же построить

$C_{16}^8 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 12870$  полиномов Жегалкина для функции, зависящей от четырех переменных.

Однако проще доказать обратное: нет такого множества мономов, которое будет отвечать за уравновешенность этой функции.

Булева функция является линейной, если полином Жегалкина линеен: он имеет вид  $P = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n$ , где  $a_0, \dots, a_n$  – булевы константы, то есть в нем не используется операция конъюнкции, а используется только сложение по модулю два.

Получается, что если булева функция является линейной, то она и уравновешена: ее вес равен половине максимально возможного и он обязательно будет делиться на соответствующую степень двойки.

Вес линейных функций, являющихся и уравновешенными, и зависящими от  $n$  переменных, всегда равен  $\frac{2^n}{2}$ , при этом он будет делиться и на  $2^k$ , где  $k = n - 1$ , т. е. на 4, 8, 16 и т.д.

Например, вес линейных функций, зависящих от трех переменных, всегда равен  $\frac{2^3}{2} = 4$ , и он делится на  $2^{(3-1)} = 2^2 = 4$ , то есть на самого себя, а вес линейных функций, зависящих от четырех переменных, всегда равен  $\frac{2^4}{2} = 8$ , и он уже делится на  $2^{(4-1)} = 2^3 = 8$ .

При этом полиномы Жегалкина таких функций совершенно раз-  
нообразные, и в них нельзя выделить конкретные мономы или их  
множества, которые будут отвечать за вышеописанные свойства.

Всегда будут существовать всевозможные полиномы линейных урав-  
новешенных функций, состоящих всего из одного монома или несколь-  
ких мономов, вес которых делится на  $2^k$ , где  $k = n - 1$ , т. е. на 4, 8, 16 и т. д.

В таблице 3 приведены линейные функции, всегда являющиеся  
и уравновешенными, вес которых делится на 4 и полиномы которых  
имеют в составе всего одну переменную.

Таблица 3

Примеры существующих полиномов для функций,  
зависящих от трех переменных

Таблица истинности функции	Полином Жегалкина
00001111	$P = x_1$
00110011	$P = x_2$
01010101	$P = x_3$

Существуют также нелинейные уравновешенные функции, вес ко-  
торых также делится на 4, но полиномы не имеют в составе какую-либо  
из этих переменных, а имеют другие всевозможные мономы (таблица 4).

Таблица 4

Таблица истинности функции	Полином Жегалкина
00010111	$P = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2$
01000111	$P = x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2$

В таблице 5 приведены примеры линейных функций, всегда яв-  
ляющихся и уравновешенными, вес которых делится на 8 и полино-  
мы которых имеют в составе всего одну переменную.

Таблица 5

Примеры существующих полиномов для функций,  
зависящих от четырех переменных

Таблица истинности функции	Полином Жегалкина
0000000011111111	$P = x_1$
0000111100001111	$P = x_2$
0011001100110011	$P = x_3$
0101010101010101	$P = x_4$



Существуют также нелинейные уравновешенные функции, вес которых также делится на 8, но полиномы не имеют в составе какую-либо из этих переменных, а имеют другие всевозможные мономы (таблица 6).

Таблица 6

Таблица истинности функции	Полином Жегалкина
0001001100001000	$P = x_4x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_1x_2x_4$
1000001010000100	$P = x_4x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_4$

В связи с тем, что линейные булевы функции являются уравновешенными, и их вес будет делиться на  $2^k$ , где  $k = n - 1$ ,  $n$  — количество переменных, от которых зависит функция, и их полиномы Жегалкина бывают абсолютно разнообразными, состоящими совершенно из различного количества мономов, нельзя выделить множество мономов булевой функции, которое будет отвечать за уравновешенность этой функции, делимость ее веса на  $2^k$ . Для каждого монома есть функция уравновешенная и с весом Хэмминга, кратным степени двойки как содержащая этот моном, так и не содержащая его. При этом выявляется зависимость этих свойств функций: если функция является уравновешенной, то ее вес Хэмминга будет обязательно делиться на степень двойки.

## Литература

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М. : Наука, 1986. С. 32–34.
2. Логачёв О.А., Сальников А.А., Ященко В.В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. М. : МЦНМО, 2004. С. 68–78. ISBN 5-94057-117-4.
3. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. М. : Физматлит, 2000. С. 36–48.

**И. А. Дюпин,**

3-й курс,

**Е. С. Зайцева,**

3-й курс,

**В. В. Башуров,**

канд. физ.-мат. наук, Уральский государственный университет путей сообщения

## О критерии Колмогорова согласования эмпирического и теоретического распределений

**В**о многих прикладных задачах требуется провести анализ опытных данных на соответствие выбранного теоретического распределения эмпирическому распределению, построенному на основании проведенных испытаний. Этот анализ проводится с помощью статистического критерия согласия, который проверяет либо простую гипотезу  $H_0: f(x, a), f$  – плотность распределения наблюдаемого закона,  $a$  – известное истинное значение параметра (вектора параметров) закона, либо сложную гипотезу, когда по этой же выборке оцениваются параметры предполагаемого закона распределения  $H_0: f(x, a_0)$ , где  $a_0$  – оценка параметра, вычисленная по выборке [1].

В качестве критерия проверки сложной гипотезы чаще всего используется критерий Пирсона (критерий  $\chi^2$ ), который изучается студентами в технических вузах. Критерий Пирсона подробно описан в различных учебных пособиях [2–4]. Для проверки простой гипотезы можно использовать и другие критерии, в том числе и непараметрический критерий Колмогорова. Критерий Пирсона универсален, но критерий Колмогорова более прост в расчетах и понятен с иллюстративной точки зрения. Критерий Колмогорова мощнее критерия Пирсона [5], т.е. при одинаково заданной вероятности допустить ошибку первого рода (уровень значимости) вероятность ошибки второго рода выше у критерия Пирсона. В данной работе описан критерий согласия Колмогорова, показан один способ его применения для проверки сложных гипотез и представлен анализ формирования статистических рядов для проверки критерия. В качестве выборочных совокупностей брались стоэлементные массивы, имеющие нормальный, показательный и равномерный законы распределения согласно критерию Пирсона.

Критерий согласия Колмогорова (в некоторых источниках еще называется критерий Колмогорова – Смирнова, но это ошибочно: критерий Смирнова рассматривает интегральную меру отклонения [6]) в своем классическом виде используется для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения любому теоретическому непрерывному распределению с заранее известными параметрами. Это обстоятельство ограничивает широкое практическое применение, так как параметры функции распределения оценивают по данным выборки. В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями рассматривается максимальное значение модуля разности между статистической функцией распределения  $F^*(x)$  и соответствующей теоретической функцией распределения  $F(x)$

$$D^* = \max |F^*(x) - F(x)|,$$

называемое статистикой Колмогорова. Доказано, что при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений  $n$  закон распределения случайной величины  $\lambda = D^* \cdot \sqrt{n}$  независимо от вида распределения случайной величины  $X$  стремится к закону распределения Колмогорова [6]:

$$P\{\lambda < x\} \rightarrow K(x),$$

где  $K(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$  – функция распределения Колмогорова, для которой составлена таблица 1, готовая для расчетов уже при  $n \geq 20$ .

Таблица 1

$\alpha$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
$x_0$	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

При проверке нулевой гипотезы о согласовании статистических данных некоторому теоретическому закону распределения вычисляется наблюдаемое значение  $\lambda_{\text{набл}}$ . Если при заданном уровне значимости  $\alpha$  наблюдаемое значение окажется меньше критического значения  $\lambda_{\text{крит}} = x_0$ , то  $H_0$  принимается, иначе – отвергается [4].

В некоторых источниках [1, 7] в качестве меры отклонения рассматривают случайную величину  $\lambda_1 = \frac{6n \cdot D^* + 1}{6\sqrt{n}}$ , более близкую к распределению Колмогорова. Но для количества значений, близких

к 50, разница случайных величин  $\lambda$  и  $\lambda 1$  становится несущественной. На рис. 1 показано отклонение  $\lambda 1 - \lambda$  от 1 до 50 при предполагаемом значении  $D^* = 0,5$ .

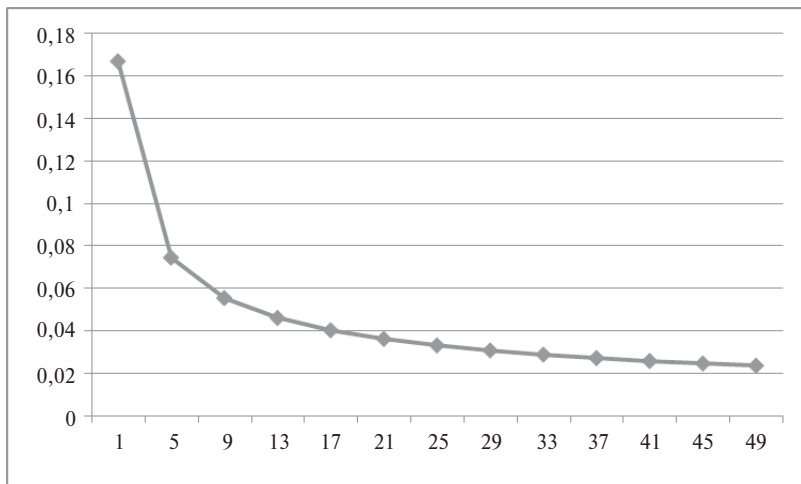


Рис. 1. Отклонения значений  $\lambda 1 - \lambda$

Алгоритм проверки: исследуется вариационный ряд количественных характеристик  $x_1 \leq x_2, \leq \dots \leq x_n$ , для которого строится статистическая функция распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ i/n, & x_i \leq x \leq x_{i+1}; \\ 1, & x_n < x. \end{cases}$$

Для каждого значения  $x_i$  определяется значение теоретической функции распределения  $F(x)$ . Затем определяется максимум  $D$  модуля разности между ними по следующей схеме: находится  $D^+ = \max |F^*(x_i) - F(x_i)|$  и  $D^- = \max |F^*(x_{i-1}) - F(x_{i-1})|$  и определяется  $D^* = \max(D^+, D^-)$ ; величина  $\lambda = D^* \cdot \sqrt{n}$  (или  $\lambda 1$ ) сравнивается с  $\lambda_{\text{крит}}$ . Если  $\lambda < \lambda_{\text{крит}}$  (или  $\lambda 1 < \lambda_{\text{крит}}$ ), то гипотеза о согласованности данных теоретическому распределению принимается.

Как было сказано ранее, критерий можно применять только в случае, когда гипотетическое распределение  $F(x)$  известно заранее

из каких-либо теоретических соображений. Если все же применять этот критерий в тех случаях, когда параметры теоретического распределения выбираются по статистическим данным, критерий дает заведомо завышенные значения вероятности  $P(\lambda)$ , поэтому мы в ряде случаев рискуем принять правдоподобную гипотезу, в действительности плохо согласующуюся с опытными данными. Такую гипотезу можно проверять по критерию Лиллиефорса, специально для таких случаев разработанному [8].

При проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, критерий согласия Колмогорова теряет свойство «свободы от распределения». В этом случае предельные распределения статистик этих критериев будут зависеть от закона, которому подчинена наблюдаемая выборка. Более того, распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят и от используемого метода оценивания параметров. Следует также учитывать, что распределения статистик существенно зависят от объема выборки.

Существует ряд подходов к использованию критерия Колмогорова. При достаточно большой выборке ее можно разбить на две части: по одной из них оценивать параметры предполагаемого теоретического распределения, а по другой, проверять согласие [9]. В некоторых частных случаях проверки сложных гипотез, например, при оценивании параметров распределений экспоненциального, нормального и некоторых других законов, таблицы процентных точек для предельных распределений статистик непараметрических критериев были получены с использованием методов статистического моделирования [9]. В работе Б. Ю. Лемешко и С. Н. Постовалова [5] методами статистического моделирования исследовано влияние на распределения статистик непараметрических критериев согласия при простых и сложных гипотезах объема наблюдаемой выборки и применяемого метода оценивания параметров. Эти же авторы получили аналитически простые модели предельных распределений статистик непараметрических критериев для случая, когда при проверке сложных гипотез оценки параметров находят в результате минимизации статистики используемого критерия [10].

В данной работе применим метод разбиения выборок объемами по 100 значений на две части. По первой части из 50 значений определяем теоретическое распределение по критерию Пирсона. Вторая часть из оставшихся 50 значений будет проверена по критерию Колмогорова о согласованности принятому закону распределения. Так

как объем второй части выборки достаточно большой для применения критерия Колмогорова в лоб, будем разбивать выборки на частичные интервалы пятью способами. В первом способе число интервалов выбираем по формуле Стерджесса. Если не подходит, то во втором способе увеличиваем примерно в два раза количество интервалов. Третий способ подразумевает выбор десяти интервалов так, чтобы в каждый интервал попало по пять значений (одинаковая частота наблюдений). В этом способе имитируется равномерная скорость возрастания эмпирической функции распределения. В четвертом способе будем рассматривать отклонения эмпирической функции распределения от значения теоретической функции в серединах интервалов. В данном случае идет осреднение значений  $F(x)$  на частичном интервале. И, наконец, в последнем способе идет вычисление без разбивки на интервалы.

**Пример 1.** Задана выборочная совокупность в 100 значений некоторого количественного признака (таблица 2).

Таблица 2

37,34	26,55	25,53	25,26	28,8	36,17	11	47,7	23,67	11,01
22,72	28,73	16,52	34,78	26,48	14,83	29,56	33,98	22,68	38,35
19,86	28,43	26,08	35,14	35,93	22,98	33,9	22,7	22,64	27,63
6,3	30,85	40,26	30,48	18,2	37,51	27,76	25,05	19,1	10,76
16,34	5,88	27,45	7,75	30,64	24,92	24,86	22,87	38,48	36,71
34,85	41,21	43,66	24,77	15,26	38,55	17,84	27,55	24,07	16,11
30,93	35,5	33,51	41,14	28,61	34,3	40,73	12,04	35,06	22,15
12,49	34,29	12,18	20,32	30,44	31,49	27,64	35,84	26,62	16,68
22,44	31,64	22,52	20,67	33,69	33,84	23,07	28,93	22,14	23,72
35,08	20,46	21,35	21,1	24,61	20,33	29,57	37,78	27,37	26,32

Из каждой строки выберем по пять чисел. Полученный диапазон значений от 6 до 48 разбиваем на семь частичных интервалов длиной 6, согласно формуле Стерджесса. Выборочная средняя  $\bar{x}=25,92$ , выборочная дисперсия  $D_B = 85,95$ , выборочное среднеквадратическое отклонение  $\sigma_B = 9,27$ . Параметр асимметрии  $As = -0,22$ , величина эксцесса  $Ex = -0,57$ , коэффициент вариации  $V = 0,36$ . Гистограмма представлена на рис. 2.

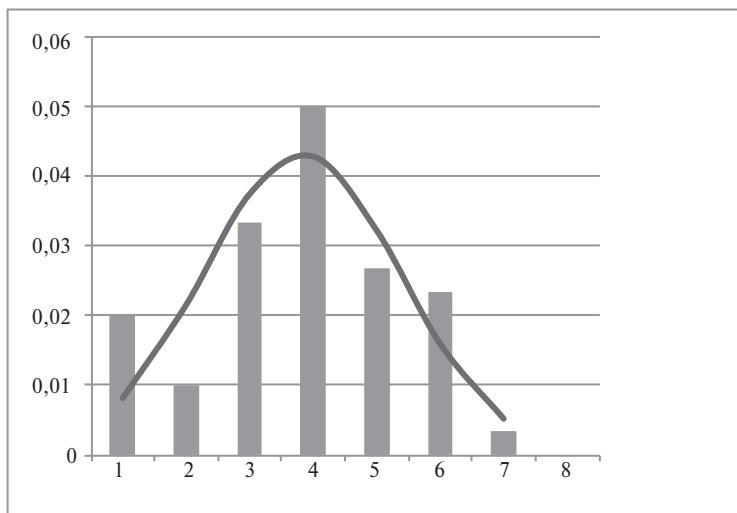


Рис. 2. Гистограмма относительных частот нормального распределения

По виду гистограммы выдвигаем гипотезу  $H_0$  о нормальном законе распределения с параметрами  $m = 25,92$  и  $\sigma_B = 9,27$ . Находим наблюдаемое значение критерия Пирсона  $\chi^2_{\text{набл}} = 8,61$ , сравниваем его с критическим значением  $\chi^2_{\text{крит}} = 9,49$ , делаем вывод о нормальном распределении генеральной совокупности с параметрами  $m = 25,92$  и  $\sigma_B = 9,27$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Рассмотрим оставшиеся значения выборки. Диапазон значений оказался от 12 до 44, который разбиваем на семь частичных интервалов длины 4,57. Результаты расчетов представлены в таблице 3.

Таблица 3

$I_i$	$n_i$	$\omega_i$	$F_i^*$	$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	$ F(x_i) - F_i^* $	$ F(x_{i+1}) - F_i^* $
(12;16,57)	5	0,1	0,1	0,026	0,085	0,074	0,015
(16,57;21,14)	7	0,14	0,24	0,085	0,211	0,155	0,028
(21,14;25,71)	10	0,2	0,44	0,211	0,409	0,229	0,031
(25,71;30,29)	8	0,16	0,6	0,409	0,634	0,191	0,034
(30,29;34,86)	10	0,2	0,8	0,634	0,820	0,166	0,02
(34,86;39,43)	6	0,12	0,92	0,820	0,932	0,1	0,011
(39,43;44)	4	0,08	1	0,932	0,980	0,068	0,02

В таблице 3:  $I_i$  – частичные интервалы,  $n_i$  – частоты наблюдений,  $\omega_i$  – относительные частоты,  $F_i^*$  – эмпирическая функция распределения,  $F(x_i)$  и  $F(x_{i+1})$  – значения теоретической функции распределения в концах интервалов.

Находим максимальное значение отклонения –  $D^* = 0,229$ , параметр  $\lambda = D\sqrt{n} = 1,617$  (или  $\lambda 1 = \frac{6nD+1}{6\sqrt{n}} = 1,64$ ). По таблице 1 критических значений для заданного уровня значимости  $\alpha = 0,05$  имеем  $\lambda_{\text{крит}} = 1,358$ , что не позволяет принять данные в рассматриваемый нормальный закон распределения. Заметим, что максимальное значение отклонения  $D$  наблюдается ближе к центру распределения, где скорость возрастания  $F(x)$  наибольшая.

Увеличим число интервалов до 16 с шагом в две единицы; по той же схеме получим  $D^* = 0,109$ ,  $\lambda = 0,76$  (или  $\lambda 1 = 0,79$ ). В этом случае гипотеза о согласованности выборочных данных нормальному закону распределения с параметрами  $m = 25,92$  и  $\sigma_B = 9,27$  принимается.

Рассмотрим вариант выбора десяти интервалов так, чтобы в каждом частичном интервале оказалось равное число наблюдений – 5. Получим  $D^* = 0,15$ ,  $\lambda = 1,064$  (или  $\lambda 1 = 1,087$ ), что позволяет включить данные в рассматриваемый нормальный закон распределения.

Рассмотрим вариант с шестью интервалами, где будет сравниваться эмпирическая функция распределения со значениями теоретической функции в серединах интервалов. Получим  $D^* = 0,14$ ,  $\lambda = 0,98$  (или  $\lambda 1 = 1,002$ ), что меньше критического значения.

И, наконец, сделаем расчет без частичных интервалов. Получим, как и в предыдущем случае,  $D^* = 0,14$ ,  $\lambda = 0,98$  (или  $\lambda 1 = 1,002$ ), что согласуется с выбранным законом распределения.

**Пример 2.** Задана вторая выборочная совокупность 100 значений (таблица 4).

Таблица 4

2,64	1,54	2,55	16,65	0,42	0,03	7,75	4,12	23,57	6,12
0,58	0,26	2,41	0,32	1,22	14,32	5,41	8,75	14,28	7,23
4,99	0,18	13,25	6,71	0,36	0,58	1,05	9,06	12,87	4,83
12,62	0,99	3,45	9,32	2,44	1,63	2,85	1,67	4,33	0,91
11,87	1,36	3,05	19,75	3,67	8,21	4,42	1,08	3,82	12,24
17,48	0,9	1,99	3,45	3,93	6,25	6,83	11,07	6,18	2,61
0,08	1,84	20,43	1,96	2,57	9,12	4,45	0,67	3,72	1,23
2,88	2,31	9,03	7,62	23,42	7,08	1,14	0,34	0,87	1,27
10,93	4,43	26,03	2,38	0,23	0,49	19,32	7,88	0,21	2,23
0,82	2,43	1,63	8,21	1,44	0,78	6,38	7,37	8,74	2,16



Из каждой строки выберем по пять чисел. Полученный диапазон значений от 0 до 24 разбиваем на шесть частичных интервалов длиной 4, согласно формуле Стерджесса. Выборочная средняя  $\bar{x}=6,08$ , выборочная дисперсия  $D_B = 28,75$ , выборочное среднеквадратическое отклонение  $\sigma_B = 5,34$ . Параметр асимметрии  $As = 1,18$ , величина эксцесса  $Ex = 0,37$ , коэффициент вариации  $V = 0,88$ . Гистограмма представлена на рис. 3.

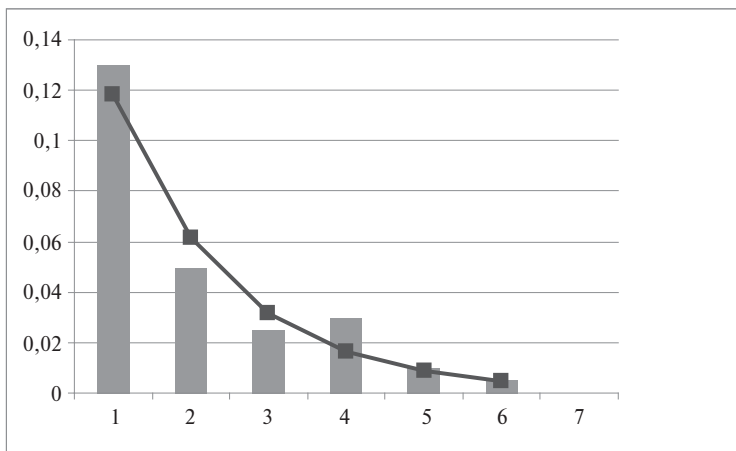


Рис. 3. Гистограмма относительных частот показательного распределения

По виду гистограммы выдвигаем гипотезу  $H_0$  о показательном законе распределения с параметром  $\mu = 0,165$ , найденным методом моментов. Находим наблюдаемое значение критерия Пирсона  $\chi^2_{\text{набл}} = 3,12$ , сравниваем его с критическим значением  $\chi^2_{\text{крит}} = 9,49$ , делаем вывод о показательном распределении генеральной совокупности с параметром  $\mu = 0,165$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Рассмотрим оставшиеся значения выборки. Диапазон значений — от 0 до 28, который разбиваем на семь частичных интервалов длиной 4. Находим максимальное значение отклонения —  $D^* = 0,298$ , параметр  $\lambda = 2,107$ . В дальнейшем опустим вычисление величины  $\lambda 1$ , которое всегда оказывается немногим большим и не влияет на проверку гипотезы. Критическое значение  $\lambda_{\text{крит}} = 1,358$  не позволяет принять данные в рассматриваемый показательный закон распределения. Результаты даны в таблице 5.

Таблица 5

$I_i$	$n_i$	$\omega_i$	$F_i^*$	$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	$ F(x_i) - F_i^* $	$ F(x_{i+1}) - F_i^* $
(0;4)	29	0,58	0,58	0	0,482059	0,58	0,097941
(4;8)	10	0,2	0,78	0,482059	0,731738	0,297941	0,048262
(8;12)	6	0,12	0,9	0,731738	0,861056	0,168262	0,038944
(12;16)	0	0	0,9	0,861056	0,928035	0,038944	0,028035
(16;20)	2	0,04	0,94	0,928035	0,962727	0,011965	0,022727
(20;24)	2	0,04	0,98	0,962727	0,980695	0,017273	0,000695
(24;28)	1	0,02	1	0,980695	0,990001	0,019305	0,009999

В таблице 5 не учитываем значение  $|F(x_i) - F_i^*| = 0,58$  при  $x_i = 0$ , так как теоретическая функция распределения еще равна нулю. Судя по значениям, теоретическая функция распределения пытается «догнать» эмпирическую. Максимальное значение расхождения – в начале распределения, где скорость изменения показательного закона наибольшая.

Увеличим число интервалов до 14 с шагом в две единицы, по той же схеме получим  $D^* = 0,36$ ,  $\lambda = 2,546$ . Это также превышает критическое значение.

Рассмотрим вариант выбора десяти интервалов так, чтобы в каждом частичном интервале оказалось равное число наблюдений – 5. Получим  $D^* = 0,241$ ,  $\lambda = 1,707$ , что превышает критическое значение (таблица 6).

Таблица 6

$I_i$	$n_i$	$\omega_i$	$F_i^*$	$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	$ F(x_i) - F_i^* $	$ F(x_{i+1}) - F_i^* $
(0;0,5)	5	0,1	0,1	0	0,079	0,1	0,021
(0,5;1)	5	0,1	0,2	0,079	0,152	0,121	0,048
(1;1,7)	5	0,1	0,3	0,152	0,244	0,148	0,056
(1,7;2,3)	5	0,1	0,4	0,244	0,315	0,156	0,085
(2,3;2,7)	5	0,1	0,5	0,315	0,359	0,185	0,141
(2,7;4,4)	5	0,1	0,6	0,359	0,518	0,241	0,082
(4,4;7)	5	0,1	0,7	0,518	0,684	0,181	0,016
(7;8,3)	5	0,1	0,8	0,684	0,745	0,116	0,055
(8,3;12)	5	0,1	0,9	0,745	0,861	0,155	0,039
(12;27)	5	0,1	1,0	0,861	0,988	0,139	0,013

Рассмотрим вариант с шестью интервалами, где будет сравниваться эмпирическая функция распределения со значениями теоретиче-

ской функции в серединах интервалов. Получим  $D^* = 0,180$ ,  $\lambda = 1,271$ , что согласуется с законом распределения.

И, наконец, сделаем расчет без частичных интервалов. Получим  $D^* = 0,151$ ,  $\lambda = 1,068$ , что согласуется с выбранным законом распределения.

**Пример 3.** Задана третья 100-элементная выборочная совокупность (таблица 7).

Таблица 7

17,17	13,88	16,92	30,84	9,78	8,12	26,15	20,69	31,67	24,12
10,42	9,09	16,53	9,28	12,76	30,23	23,04	27,12	30,21	25,56
22,32	8,78	29,85	24,92	9,54	10,41	12,17	27,34	29,69	22,03
29,58	11,94	19,18	27,6	16,6	14,16	17,72	14,29	21,08	11,65
29,23	13,27	18,23	31,34	19,69	26,62	21,26	12,27	20,02	29,41
31	8,41	15,29	19,19	20,27	24,31	25,08	28,8	24,2	17,07
8,35	14,84	31,42	15,21	16,96	27,42	21,32	10,76	19,76	12,81
17,78	16,23	27,36	26	31,66	25,38	12,35	9,43	11,5	12,94
28,72	21,29	31,79	16,44	8,98	10,04	31,29	26,28	8,91	16,02
11,33	16,58	14,15	26,62	13,54	11,17	24,49	25,72	27,11	15,8

Из каждой строки таблицы 7 также выберем по пять чисел. Полученный диапазон значений от 8 до 32 разбиваем на шесть частичных интервалов длиной 4, согласно формуле Стерджесса. Выборочная средняя  $\bar{x} = 20,08$ , выборочная дисперсия  $D_B = 51,99$ , выборочное среднеквадратическое отклонение  $\sigma_B = 7,21$ . Параметр асимметрии  $As = -0,02$ , величина эксцесса  $Ex = -1,37$ , коэффициент вариации  $V = 0,36$ . Гистограмма представлена на рис. 4.

По виду гистограммы выдвигаем гипотезу  $H_0$  о равномерном законе распределения с параметрами  $a = 7,59$  и  $b = 32,57$ , найденными методом моментов. Находим наблюдаемое значение критерия Пирсона  $\chi^2_{\text{набл}} = 1,25$ , сравниваем его с критическим значением  $\chi^2_{\text{крит}} = 7,81$ , делаем вывод о равномерном распределении генеральной совокупности с параметрами  $a = 7,59$  и  $b = 32,57$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Рассмотрим оставшиеся значения выборки. Диапазон значений оказался также от 8 до 32, который разбиваем на шесть частичных интервалов длиной 4. Находим максимальное значение отклонения —  $D^* = 0,223$ , параметр  $\lambda = 1,579$ . Критическое значение  $\lambda_{\text{крит}} = 1,358$  не позволяет принять данные в рассматриваемый равномерный закон распределения. Результаты расчетов представлены в таблице 8.

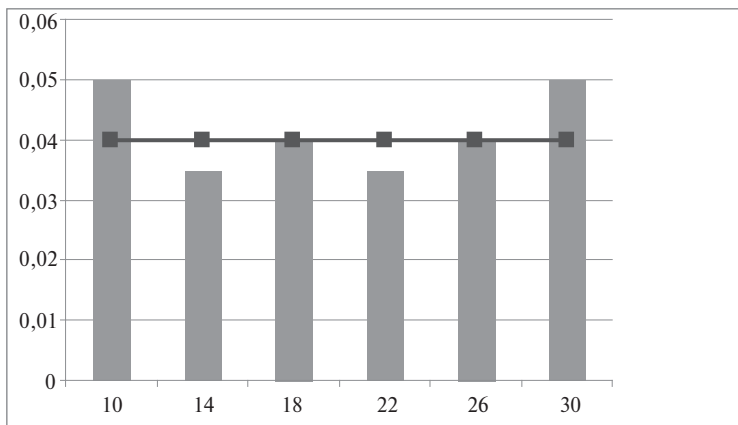


Рис. 4. Гистограмма относительных частот  
равномерного распределения

Таблица 8

$I_i$	$n_i$	$\omega_i$	$F_i^*$	$F(x_i)$	$F(x_{i+1})$	$ F(x_i) - F_i^* $	$ F(x_{i+1}) - F_i^* $
(8;12)	10	0,2	0,2	0,016	0,177	0,184	0,023
(12;16)	9	0,18	0,38	0,177	0,337	0,203	0,043
(16;20)	9	0,18	0,56	0,337	0,497	0,223	0,063
(20;24)	3	0,06	0,62	0,497	0,657	0,123	0,037
(24;28)	12	0,24	0,86	0,657	0,817	0,203	0,043
(28;32)	7	0,14	1	0,817	0,977	0,183	0,023

Из таблицы 8 видно достаточно равномерное отклонение значений. Увеличим число интервалов до 12 с шагом в две единицы, по той же схеме получим  $D^* = 0,183$ ,  $\lambda = 1,296$ . Гипотеза о согласованности выборочных данных равномерному распределению с параметрами  $a = 7,59$  и  $b = 32,57$  принимается.

Рассмотрим вариант выбора десяти интервалов так, чтобы в каждом частичном интервале оказалось равное число наблюдений – 5. Получим  $D^* = 0,203$ ,  $\lambda = 1,437$ , что превышает критическое значение.

Рассмотрим вариант с шестью интервалами, где будет сравниваться эмпирическая функция распределения со значениями теоретической функции в серединах интервалов. Получим  $D^* = 0,143$ ,  $\lambda = 1,013$ , что согласуется с законом распределения. Результаты расчетов представлены в таблице 9.

Таблица 9

$I_i$	$n_i$	$\omega_i$	$F_i^*$	$x_i^*$	$F(x_i^*)$	$ F(x_i^*) - F_i^* $
(8;12)	10	0,2	0,2	10	0,096	0,104
(12;16)	9	0,18	0,38	14	0,257	0,123
(16;20)	9	0,18	0,56	18	0,417	0,143
(20;24)	3	0,06	0,62	22	0,577	0,043
(24;28)	12	0,24	0,86	26	0,737	0,123
(28;32)	7	0,14	1	32	0,897	0,103

Сделаем расчет без частичных интервалов. Получим  $D^* = 0,121$ ,  $\lambda = 0,852$ , что также согласуется с выбранным законом распределения.

Показано, что при проверке согласования выборочных данных некоторому закону распределения по критерию Колмогорова при достаточно больших объемах выборки выявлены закономерности. При небольшом числе частичных интервалов необходимо сравнивать эмпирическую функцию распределения с теоретической, вычисленной в серединах интервалов. Для небыстро возрастающих функций можно рассматривать число интервалов, которое будет в 2–2,5 раза больше числа интервалов, полученных по формуле Стерджесса.

### Литература

1. Лемешко Б.Ю., Маклаков А. А. Непараметрические критерии при проверке сложных гипотез о согласии с распределениями экспоненциального семейства // Автометрия. 2004. Т. 40. № 3. С. 3–20. ISSN 0320-7102.
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М. : КНОРУС. 2010. 480 с. ISBN 578-5-406-00565-1.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. М. : Высшая школа. 2002. 479 с. ISBN 5-06-004214-6.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М. : Айрис-пресс. 2006. 288 с. ISBN 5-8112-1853-2.
5. Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 7. С. 62–71. ISSN 1028-6861.

6. Орлов А. И. Непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, омега-квадрат и ошибки при их применении // Науч. журнал КубГАУ. 2014. № 97 (03). С. 1–28. ISSN 1990-4665.
7. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М. : Наука. 1983. 416 с.
8. Lilliefors H. On the Kolmogorov – Smirnov test for normality with mean and variance unknown // Journal of the American Statistical Association. Vol. 62. № 318 (Jun., 1967). Pp. 399–402.
9. Р 50.1.037–2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия распределения с теоретическим. Ч. II. Непараметрические критерии. М. : Изд-во стандартов, 2002.
10. Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. № 2. С. 88–102. ISSN 0320-7102.

*Научное издание*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИ В ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ  
СИСТЕМНЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ**

Научные редакторы – Г.А. Тимофеева, О.В. Куликова  
Редактор Л.С. Барышникова  
Компьютерная верстка Н. А. Журавлевой

Подписано в печать 31.08.2017.  
Формат 60х84/16. Электронная версия.  
Усл. печ. л. 5,6. Заказ 230.

620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66.